DÉPARTEMENT DE GÉNIE CHIMIQUE

MODÉLISATION NUMÉRIQUE EN GÉNIE CHIMIQUE (GCH2535)
THÉORIE DES E.D.P : EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES
Hiver 2020

Problèmes de fonctions propres et méthode de séparation des variables

1. On considère l'équation aux dérivées partielles suivante

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2yu = 0.$$

En utilisant la méthode de la séparation des variables, trouver les équations différentielles ordinaires (E.D.O) pour $F(x)$,$G(y)$ telles que $u(x,y) = F(x)G(y)$ soit une solution de l'équation aux dérivées partielles décrite ci-dessus.

2. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$u(x,y) + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + e^y \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0 \text{ pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1. \tag{1}$$

En utilisant la méthode de la séparation des variables, trouver les équations différentielles ordinaires (E.D.O) pour $F(x)$,$G(y)$ pour que $u(x,y) = F(x)G(y)$ soit une solution de l'équation aux dérivées partielles (1).

3. La distribution de la température $u(x,y)$ dans une plaque carrée $[0,\pi] \times [0,\pi]$ de métal non homogène est donnée par l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

La distribution de température satisfait les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{\partial u(x,\pi)}{\partial y} &= 0 \\ u(0,y) &= 0 \text{ et } u(\pi,y) = 0 \end{aligned}$$

En utilisant la méthode de la séparation des variables, trouver les équations différentielles ordinaires (E.D.O) pour $F(x)$,$G(y)$ telles que $u(x,y) = F(x)G(y)$ soit une solution de l'équation aux dérivées partielles décrite ci-dessus. Donner aussi les conditions aux limites associées à l'équation différentielle ordinaire pour $F(x)$.

4. Le déplacement vertical $v(x,t)$ d'une corde de longueur $L = 1$ dans un milieu élastique satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + v, \text{ pour } 0 < x < 1 \text{ et } t > 0. \tag{2}$$

La corde est fixée aux extrémités : $v(0,t) = 0$ et $v(1,t) = 0$ pour $t > 0$.

La corde est mise en mouvement avec une vitesse initiale nulle $\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0$ pour $0 < x < 1$ à partir de sa position initiale

$$v(x,0) = u_{\frac{1}{3}}(x) - u_{\frac{2}{3}}(x) \text{ pour } 0 < x < 1,$$

où $u_c(x)$ est la fonction échelon-unité de Heaviside définie par $u_c(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < c, \\ 1 & c \leq x. \end{cases}$

Soit $v(x,t) = F(x)G(t)$. En utilisant la méthode de la séparation des variables, montrer que la fonction $F(x)$ satisfait au problème de fonctions propres

$$\begin{cases} F''(x) - \lambda F(x) = 0; \\ F(0) = 0 \text{ et } F(1) = 0, \end{cases}$$

et que

$$G''(t) - (\lambda - 1)G(t) = 0, G'(0) = 0,$$

où λ est une constante de séparation.

5. Soit l'équation d'onde d'une membrane vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

En utilisant la méthode de la séparation des variables, trouver les équations différentielles ordinaires (E.D.O) pour $F(x)$,$G(y)$ et $H(t)$ telles que $u(x,y,t) = F(x)G(y)H(t)$ soit une solution de l'équation aux dérivées partielles décrite ci-dessus.

6. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3y^2 u = 0 \text{ pour } x > 0 \text{ et } y > 0.$$

Trouver la solution générale $u(x,y)$ pouvant être obtenue en utilisant la méthode de la séparation des variables.

7. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0 \text{ pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1. \tag{3}$$

En utilisant la méthode de séparation des variables, trouver les équations différentielles ordinaires satisfaites par les fonctions $F(x)$ et $G(y)$ pour que $u(x,y) = F(x)G(y)$, soit une solution de l'équation aux dérivées partielles (3).

8. Trouver les valeurs propres et les fonctions propres associées aux problèmes de conditions aux limites suivants:

(a)
$$y''(x) - 2y'(x) + \lambda y(x) = 0 \text{ avec } y(0) = 0 \text{ et } y(\pi) = 0$$

(b)
$$y''(x) - \lambda y(x) = 0 \text{ avec } y(0) = 0 \text{ et } y(L) = 0$$

(c)
$$y''(x) + (1 + \lambda)y(x) = 0 \text{ avec } y(0) = 0 \text{ et } y'(\pi) = 0$$

(d)
$$y''(x) - \lambda y(x) = 0 \text{ avec } y'(0) = 0 \text{ et } y'(L) = 0$$

(e)

$$y'' + (1-\lambda)y = 0 \text{ si } -1 < x < 1, \text{ avec } y(-1) - y(1) = 0, \text{ et } y'(-1) - y'(1) = 0$$

(f)

$$y'' + 6y' + (5+\lambda)y = 0 \text{ pour } 0 < x < 2, \quad y(0) = 0 \text{ et } y(2) = 0$$

(g)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0 \text{ pour } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad y'(0) = 0, \quad y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Série de Fourier

9. Déterminer la plus petite période (période fondamentale) des fonctions suivantes. **Justifier votre réponse**.
   (a) $f(x) = 3 - 2\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$.
   (b) $f(x) = \cos(\pi x)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.
   (c) $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.
   (d) $f(x) = -1 + 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{3}\right)$.
   Note: $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

10. Soit $f(x) = \begin{cases} (x-1)^{-1} & \text{si} \quad -2 < x < 0, \\ (x+1)^{-1} & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ x^{-1} & \text{si} \quad 1 < x < 2, \end{cases}$ et $f(x+4) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
    Définir la fonction $f(x)$ en ses points de discontinuités $x = 0$ et $x = 1$ pour que sa série de Fourier converge vers $f(x)$ pour tout $x \in]-2{,}2[$.

11. Trouver la série de Fourier associée à chacune des fonctions suivantes:
    (a)
    $$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad -2 \le x < 0; \\ 0 & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \end{cases} \quad \text{et } f(x+4) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$
    (b)
    $$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad -\pi \le x < 0; \\ 0 & \text{si} \quad 0 \le x < \pi \end{cases} \quad \text{et } f(x+2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

12. Soit $f(x)$ une fonction périodique de période $2\sqrt{\pi}$ telle que
    $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sqrt{\pi} \le x \le 2\sqrt{\pi}; \\ 0 & \text{si} \quad 2\sqrt{\pi} \le x \le 3\sqrt{\pi}. \end{cases}$$
    Calculer la série de Fourier de $f(x)$. Quelle est la valeur de la série de Fourier en $x = \sqrt{\pi}$?

13. Soit $u(x,t) = x + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)t}$.
    Sachant que $\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = x$ pour $0 \le x \le 2$, déterminer les coefficients C_n pour $n \ge 1$.

14. Soit $f(x)$ une fonction périodique de période 2π définie par:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}; \\ \pi - x & \text{si} \quad \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

(a) Tracer la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

(b) Calculer série de Fourier associée à la fonction $f(x)$.

15. Soit $f(x)$ une fonction définie par:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1; \\ 2 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Pour calculer la série de Fourier associée à la fonction $f(x)$, on définit par prolongement la fonction impaire, périodique de période $p = 4$ qui coïncide avec la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[0,2]$.

(a) Tracer sur l'intervalle $[-2,6]$ le graphe du prolongement impair de la fonction $f(x)$.

(b) **Sans calculer** la série de Fourier du prolongement impair de la fonction $f(x)$, trouver les valeurs vers lesquelles cette série convergera pour $x = \dfrac{3}{2}$ et $x = 101$.

16. Soit une fonction définie par:

$$f(x) = 1 + x^2 \text{ pour } 0 < x < 1.$$

On définit par prolongement la fonction impaire, périodique de période $p = 2$ qui coïncide avec la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[0,1]$. Tracer sur l'intervalle $[-1,3]$ le graphe de la fonction vers laquelle la série de Fourier du prolongement impair de la fonction $f(x)$ converge.

17. Soit la fonction périodique de période $P = 4$ définie par le graphe suivant qu'on voit ici sur l'intervalle $-8 < x < 8$:

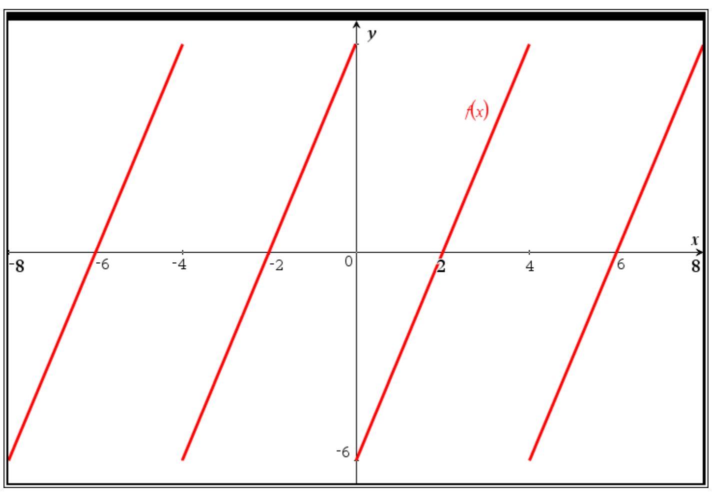

FIG. 1 – *La fonction* $f(x)$.

Trouver la série de Fourier de $f(x)$.

18. Soit
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -3 \le x < 0; \\ x+2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 3, \end{cases}$$
et on suppose que $f(x+6) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Trouver $S_F(x)$, la série de Fourier pour la fonction $f(x)$.
   (b) Sachant que
$$S_F(63) = \frac{7}{4} + \frac{3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2},$$
   déterminer la valeur vers laquelle cette série converge. **Justifier votre réponse**.

Équation de la chaleur

19. Résoudre
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L, t > 0; \\ u(0,t) = 0 \text{ et } u(L,t) = 0 \text{ pour } t > 0; \\ u(x,0) = 1, \quad 0 < x < L. \end{cases}$$

20. Résoudre
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 2, t > 0; \\ u(0,t) = 0 \text{ et } u(2,t) = 0 \text{ pour } t > 0; \\ u(x,0) = 2\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) - \sin(\pi x) + 4\sin(2\pi x), \quad 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

21. On considère le problème de diffusion de la chaleur dans une tige métallique de longueur $L = 1$.
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \text{ pour } 0 < x < 1 \text{ et } t \ge 0 \\ u(0,t) = 0 \text{ et } \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \text{ pour } t > 0; \\ u(x,0) = x(1-x) \text{ pour } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$
Déterminer la température $u(x,t)$. **On demande une solution complète où chaque étape est justifiée.**

$$\textbf{Note :} \quad x(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{32}{(2n-1)^3\pi^3} + \frac{8(-1)^n}{(2n-1)^2\pi^2} \right] \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right).$$

Équation de Laplace

22. Trouver la solution du problème suivant
$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ dans } R = \{(x,y) \ : \ 0 < x < L, 0 < y < L\}; \\ u(x,0) = 0 \text{ et } u(x,L) = \cos\left(\dfrac{\pi x}{L}\right), \text{ pour } x \in [0,L]; \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 \text{ et } \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,y) = 0 \text{ pour } y \in [0,L]. \end{cases}$$
Note: On demande une solution complète où chaque étape est justifiée.

23. La température stationnaire $u(x,y)$ dans une plaque rectangulaire est solution du problème suivant:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ dans } R = [0,a] \times [0,b]; \\ u(0,y) = 0 \text{ et } u(a,y) = 0, \text{ pour } y \in [0,b]; \\ u(x,0) = 0 \text{ et } \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,b) = \displaystyle\sum_{n=1}^{20} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \text{ pour } x \in [0,a]. \end{cases}$$

Déterminer la température $u(x,y)$.

24. Déterminer la température $u(x,y)$. dans une plaque qui a la forme d'un rectangle comme solution du problème suivant:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ dans } R = \{(x,y) \ : \ 0 < x < 2, 0 < y < 1\}; \\ u(0,y) = 0 \text{ et } u(2,y) = y(2-y), \text{ pour } y \in [0,1]; \\ u(x,0) = 0 \text{ et } \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = 0 \text{ pour } x \in [0,2]. \end{cases}$$

N.B.: On demande une solution complète où chaque étape est justifiée.

$$\textbf{Note :} \quad y(2-y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32}{(2n-1)^3\pi^3} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi y}{2}\right).$$

25. Trouver la solution $u(x,y)$ de l'équation de Laplace dans la plaque carrée $0 < x < \dfrac{\pi}{2}, 0 < y < \dfrac{\pi}{2}$ qui satisfait les conditions limites suivantes:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y}(0,y) & = y\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) \text{ si } 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}; \\ u\left(\dfrac{\pi}{2},y\right) & = 0 \text{ si } 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) & = 0 \text{ si } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\left(x,\dfrac{\pi}{2}\right) & = 0 \text{ si } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$$

Note: On demande une solution complète où chaque étape est justifiée.

$$\textbf{Indication :} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \sin(2ny)dy = \frac{(-1)^{n+1}+1}{4n^3}.$$

Réponses

1. $x\dfrac{F'(x)}{F(x)} = -2y\dfrac{G(y)}{G'(y)} = \lambda,\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} xF'(x) - \lambda F(x) = 0 \\ 2yG(y) + \lambda G(y) = 0. \end{cases}$
2. $e^y\dfrac{G'(y)}{G(y)} = \dfrac{F'(x)}{F(x)} - 1 = \lambda,\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} F'(x) - (1+\lambda)F(x) = 0 \\ e^yG'(y) - \lambda G(y) = 0. \end{cases}$
3. $\dfrac{G''(y) + 2G'(y)}{G(y)} = \dfrac{-F''(x)}{F(x)} = \lambda$, où λ est une constante réelle de séparation.
   - Le problème en $F(x)$: $F''(x) + \lambda F(x) = 0, \quad F(0) = 0$ et $F(\pi)$.
   - Le problème en $G(y)$: $G''(y) + 2G'(y) - \lambda G(y) = 0, \quad G'(\pi) = 0$.
4. $\dfrac{F''(x)}{F(x)} = \dfrac{G''(y)}{G(y)} + 1 = \lambda \Rightarrow \begin{cases} F''(x) - \lambda F(x) = 0 \\ G''(t) - (1-\lambda)G(t) = 0. \end{cases}$
   - Les C.L. pour $F(x)$ sont : $v(0,t) = F(0)G(t) = 0 \Rightarrow F(0) = 0$ car $G(t) \neq 0$ et $v(1,t) = F(1)G(t) = 0 \Rightarrow F(1) = 0$.
   - La C.L. pour $G(t)$ est : $\dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = F(x)G'(0) = 0 \Rightarrow G'(0) = 0$ car $F(x) \neq 0$.
5. $\dfrac{H''(t)}{H(t)} = c^2\left(\dfrac{F''(x)}{F(x)} + \dfrac{G''(y)}{G(y)}\right) = \lambda$, où λ est une constante réelle de séparation. Donc
   - L'équation en $H(t)$: $H''(t) - \lambda H(t) = 0$.
   - Et : $c^2\dfrac{F''(x)}{F(x)} = \lambda - c^2\dfrac{G''(y)}{G(y)} = \mu,\mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} c^2F''(x) - \mu F(x) = 0 \\ c^2G''(y) + (\mu - \lambda)G(y) = 0. \end{cases}$
6. On a $x^2\dfrac{F'(x)}{F(x)} = -3y^2\dfrac{G(y)}{G'(y)} = \lambda$, où λ est une constante réelle de séparation. Ainsi
   - L'équation en $F(x)$: $F'(x) - \lambda F(x) = 0 \Rightarrow F(x) = K_1e^{-\frac{\lambda}{x}}$.
   - L'équation en $G(y)$: $-3y^2G(y) - \lambda G'(y) = 0 \Rightarrow G(y) = K_2e^{-\frac{y^3}{\lambda}}$.

   Dons la solution générale de l'EDP, par séparation des variables est $u(x,y) = \dfrac{K}{e^{\frac{\lambda}{x} + \frac{y^3}{\lambda}}}$.
7. On a $\dfrac{F'(x)}{F(x)} = -\dfrac{G'(y)}{G(y) + yG''(y)} = \lambda$, où λ est une constante réelle de séparation. Ainsi
   - L'équation en $F(x)$: $F'(x) - \lambda F(x) = 0$.
   - L'équation en $G(y)$: $\lambda yG''(y) + G'(y) + \lambda G(y) = 0$.

   Donc la solution générale de l'EDP, par séparation des variables est $u(x,y) = \dfrac{K}{e^{\frac{\lambda}{x} + \frac{y^3}{\lambda}}}$.
8. (a) Les valeurs propres sont $\lambda_n = 1 + n^2,n \geq 1$ et les fonctions propres sont $y_n(x) = C_ne^x\sin(nx),n \geq 1$.

   (b) Les valeurs propres sont $\lambda_n = -\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2,n \geq 1$ et les fonctions propres sont $y_n(x) = C_n\sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right),n \geq 1$.

   (c) Les valeurs propres sont $\lambda_n = -1 + \left(\dfrac{2n-1}{2}\right)^2,n \geq 1$ et les fonctions propres sont $y_n(x) = C_n\sin\left(\dfrac{2n-1}{2}x\right),n \geq 1$.

(d) Les valeurs propres sont $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, n \geq 0$ et les fonctions propres sont $y_n(x) = C_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), n \geq 0$.

(e) Les valeurs propres sont $\lambda_n = 1 - n^2\pi^2, n \geq 0$ et les fonctions propres sont $y_n(x) = C_n \cos(n\pi x) + D_n \sin(n\pi x), \quad n \geq 0$.

(f) Les valeurs propres sont $\lambda_n = 4 + \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2, n \geq 1$ et les fonctions propres sont $y_n(x) = C_n e^{3x} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), n \geq 1$.

(g) Les valeurs propres sont $\lambda_0 = 0$ avec la fonction propre $y_0(x) = C_0$, et $\lambda_n = (2n-1)^2, n \geq 1$ et les fonctions propres associées $y_n(x) = \cos\left((2n-1)x\right), n \geq 1$.

9. (a) La période fondamentale de $f(x)$ est $p = \textbf{ppcm}\left\{\frac{2\pi}{\frac{5\pi}{2}}, \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{2}}\right\} = \textbf{ppcm}\left\{\frac{4}{5}, \frac{4}{3}\right\} = 4$.

(b) La période fondamentale de $f(x)$ est $p = \textbf{ppcm}\left\{\frac{2\pi}{\pi}, \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}\right\} = \textbf{ppcm}\{2,4\} = 4$.

(c) La période fondamentale de $f(x)$ est $p = \frac{2\pi}{\frac{n\pi}{L}} = \frac{2L}{n}, n \geq 1$.

(d) La période fondamentale de $f(x) = \cos(x) + \sin\left(\frac{x}{3}\right)$ est $p = \textbf{ppcm}\left\{\frac{2\pi}{1}, \frac{2\pi}{\frac{1}{3}}\right\} = \textbf{ppcm}\{2\pi, 6\pi\} = 6\pi$.

10. La série de Fourier de $f(x)$ en

- $x = 0$ converge vers $S_F(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{(0-1)^{-1} + (0+1)^{-1}}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$;
- $x = 1$ converge vers $S_F(1) = \frac{f(1^+) + f(1^-)}{2} = \frac{1^{-1} + (1+1)^{-1}}{2} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$;

On devrait donc définir $f(x)$ en $x = 0$ et en $x = 1$ par $f(0) = 0$ et $f(1) = \frac{3}{4}$.

11. (a) $L = 2$ et $S_F(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left[1 - (-1)^n\right]}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - \frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$.

(b) $L = \pi$ et $S_F(x) = \frac{1 - e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{(n^2+1)\pi} \cos(nx) + \frac{n\left[(-1)^n e^{-\pi} - 1\right]}{(n^2+1)\pi^2} \sin(nx)$.

12.
- $L = \sqrt{\pi}$ et $S_F(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n\pi} \sin\left(n\sqrt{\pi}x\right)$.
- Comme $f(x)$ est discontinue en $x = \sqrt{\pi}$, la série de Fourier de $f(x)$ converge vers $S_F(\sqrt{\pi}) = \frac{f(\sqrt{\pi}^+) + f(\sqrt{\pi}^-)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.

13. $\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{n\pi}{2} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = x \Rightarrow C_n \frac{n\pi}{2} = a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{4\left[(-1)^n - 1\right]}{n^2\pi^2} \Rightarrow C_n = \frac{8\left[(-1)^n - 1\right]}{n^3\pi^3}$ pour $n \geq 1$.

14. (a) Le graphe de la fonction $f(x)$ sur $\left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$ est illustrée à la figure 2.

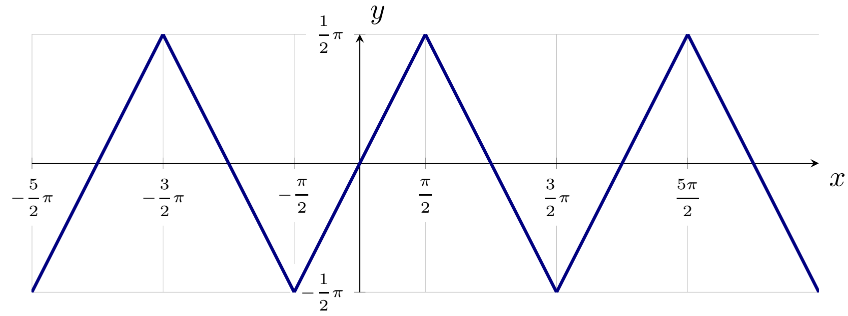

FIG. 2 – *Le graphe de* $f(x)$ *sur* $\left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$

(b) La série de Fourier de $f(x)$ est : $L = \pi$ et $S_F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi}\sin(nx)$.

15. (a) Le graphe du prolongement impair de $f(x)$ est illustrée à la figure 3.

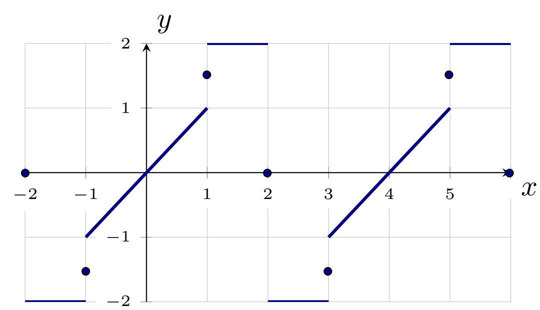

FIG. 3 – *Le graphe du prolongement impair de* $f(x)$ *sur* $[-2{,}6]$

(b)
- Comme $f(x)$ est continue en $x = \dfrac{3}{2}$, alors la série de Fourier de $f(x)$ converge vers $S_F\left(\dfrac{3}{2}\right) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 2$.
- Puisque $f(x)$ est discontinue en $x = 101 = 4 \times 25 + 1$, alors la série de Fourier de $f(x)$ converge vers $S_F(101) = S_F(1) = \dfrac{f(1^+) + f(1^-)}{2} = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2}$.

16. Le graphe du prolongement impair de $f(x)$ est illustrée à la figure 4.

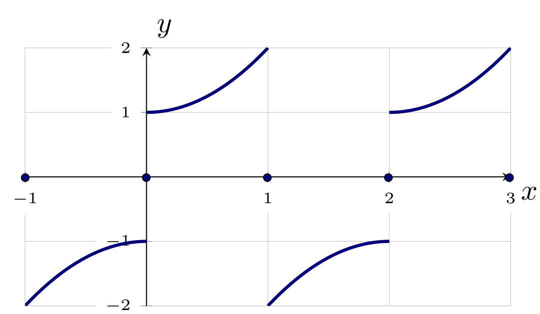

FIG. 4 – *Le graphe du prolongement impair de* $f(x)$ *sur* $[-1{,}3]$

17. $f(x) = 3x - 6$ pour $0 < x < 4$ et $f(x+4) = f(x) \Rightarrow p = 4$ et sa série de Fourier de $f(x)$ est $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-12}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$.

18. (a) $S_F(x) = \frac{7}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\left[(-1)^n - 1\right]}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) + \frac{2 - 5(-1)^n}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$.

    (b) Comme $f(x)$ est discontinue en $x = 63 = 10 \times 6 + 3$, la série de Fourier de $f(x)$ converge vers $S_F(63) = S_F(3) = \frac{f(3^+) + f(3^-)}{2} = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}$.

19. La solution est $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \frac{2\left[1 - (-1)^n\right]}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ ou encore $u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{L}\right)^2 t} \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)$.

20. La solution est $u(x,t) = 2e^{-\frac{\pi^2}{4}t} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) + 4e^{-4\pi^2 t} \sin(2\pi x)$.

21. La solution est $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{32}{(2n-1)^3\pi^3} + \frac{8(-1)^n}{(2n-1)^2\pi^2}\right] e^{-\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2 t} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)$.

22. On a $u(x,y) = K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$ et $u(x,L) = \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \Rightarrow K_1 = \frac{1}{\sinh(\pi)}$ et $K_0 = 0, K_n = 0$ pour $n \geq 2$. Donc la solution est $u(x,y) = \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{\pi y}{L}\right)}{\sinh(\pi)}$.

23. La solution est $u(x,y) = \sum_{n=1}^{20} \frac{-a^2}{n^2\pi^2 \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$.

24. La solution est $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32}{(2n-1)^3\pi^3 \sinh((2n-1)\pi)} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi y}{2}\right) \sinh\left(\frac{(2n-1)\pi y}{2}\right)$.

25. La solution est $u(x,y) = K_0\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2n^3\pi\left(1 - e^{2n\pi}\right)} \cos(2ny)\left(e^{2nx} - e^{2n(\pi - x)}\right)$.