

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTREAL
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

Section mécanique appliquée

Résistance des matériaux II
(MEC 2405)

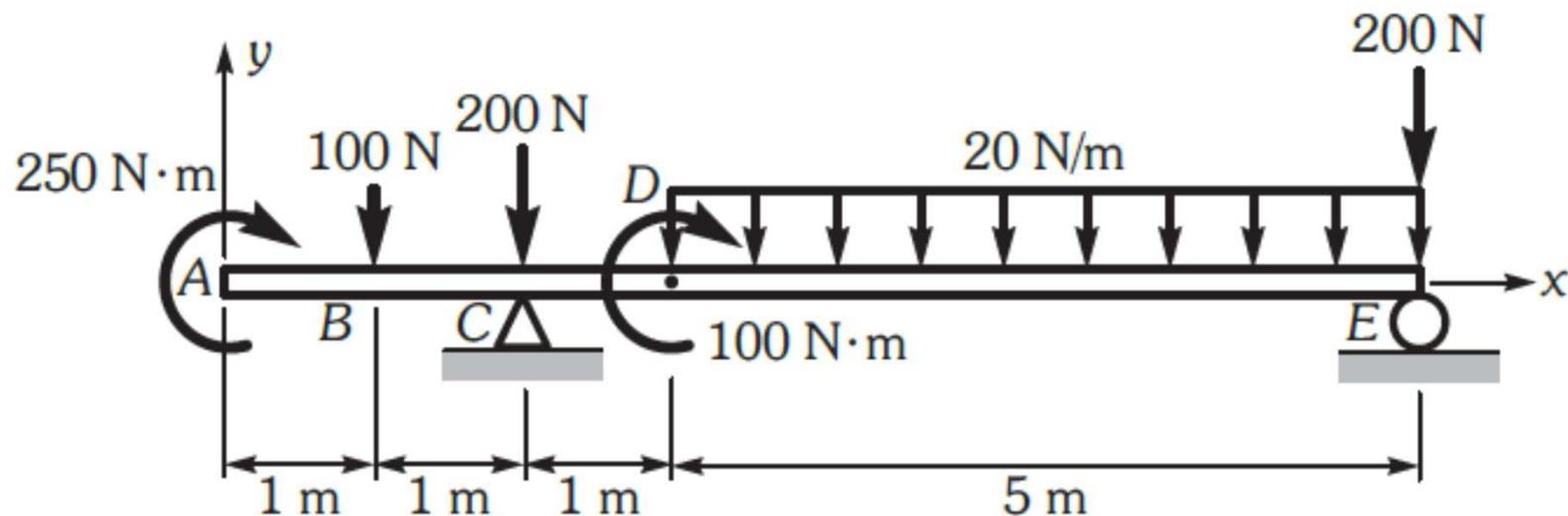
Série d'exercices

RÉVISION DES NOTIONS DU COURS MEC1420

Diagramme des efforts tranchants et des moments fléchissants

Problème 3.3

Tracer les diagrammes de l'effort tranchant V et du moment fléchissant M , en y indiquant les valeurs importantes.

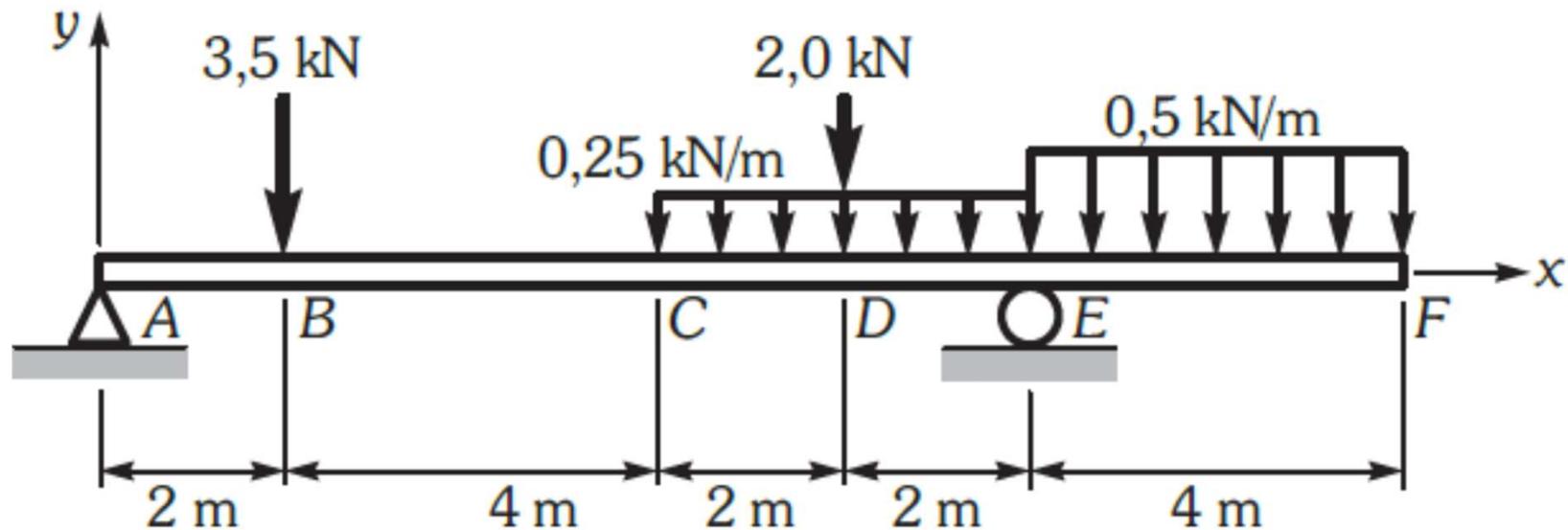


Réponses : $V_{\max} = 100 \text{ kN}$; $V_{\min} = 0$;
 $M_{\max} = 250,0 \text{ N}\cdot\text{m}$; $M_{\min} = 0$

Diagramme des efforts tranchants et des moments fléchissants

Problème 3.4

Tracer les diagrammes de l'effort tranchant V et du moment fléchissant M , en y indiquant les valeurs importantes.



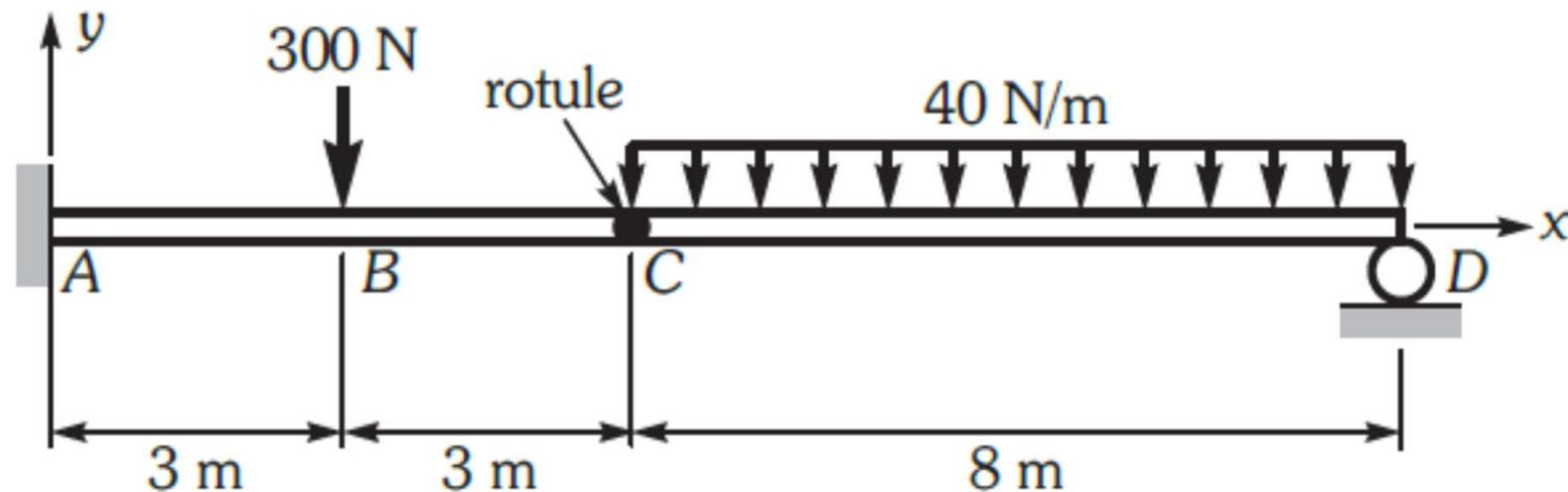
Réponses : $V_{\max} = 3,5 \text{ kN}$; $V_{\min} = -3,0 \text{ kN}$;

$M_{\max} = 6,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$; $M_{\min} = -4,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$.

Diagramme des efforts tranchants et des moments fléchissants

Problème 3.6

Tracer les diagrammes de l'effort tranchant V et du moment fléchissant M , en y indiquant les valeurs importantes.



Réponses : $V_{\max} = 160,0 \text{ N}$; $V_{\min} = -460,0 \text{ N}$;

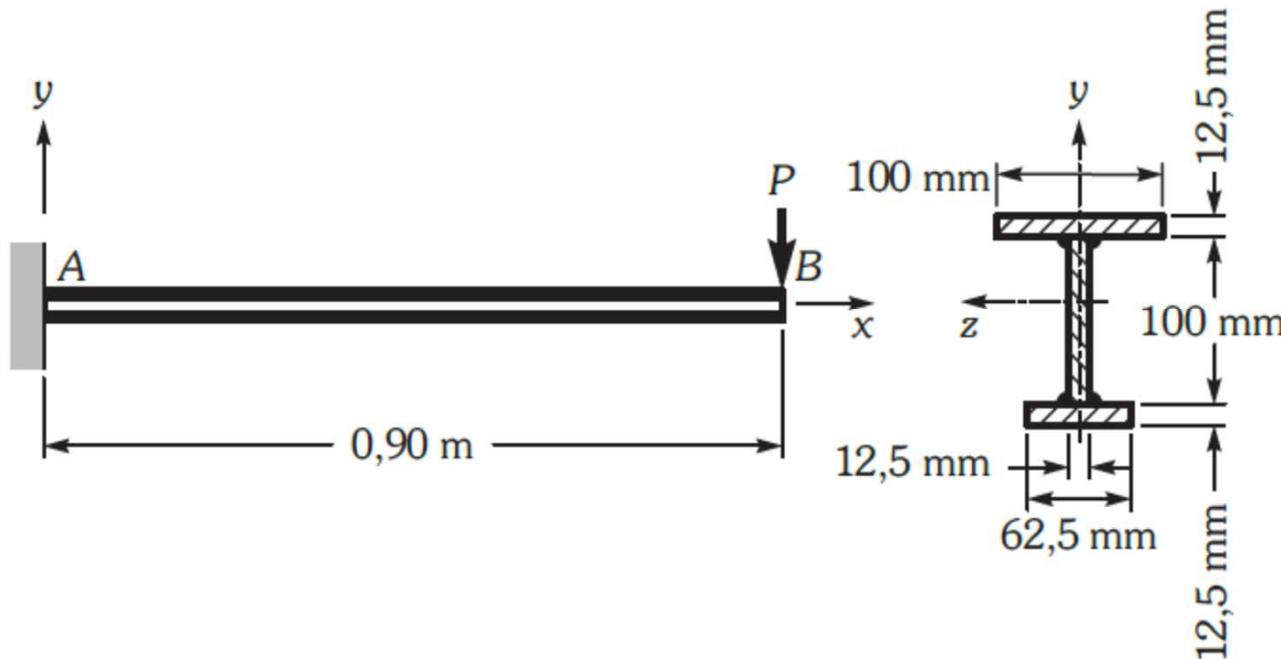
$M_{\max} = 320,0 \text{ N}\cdot\text{m}$; $M_{\min} = -1860,0 \text{ N}\cdot\text{m}$.

Contraintes dans les poutres en flexion

Problème 4.4

Déterminer la valeur maximale de la charge P que pourra supporter la poutre illustrée si on doit simultanément respecter les limites suivantes :

- pour la contrainte normale en flexion : 140 MPa ;
- pour les cordons de soudure : 95 kN/m par cordon.



Réponses :

$$[I_z = 7,283 \times 10^{-6} \text{ m}^4];$$

$$P_{\max} = 16,06 \text{ kN}$$

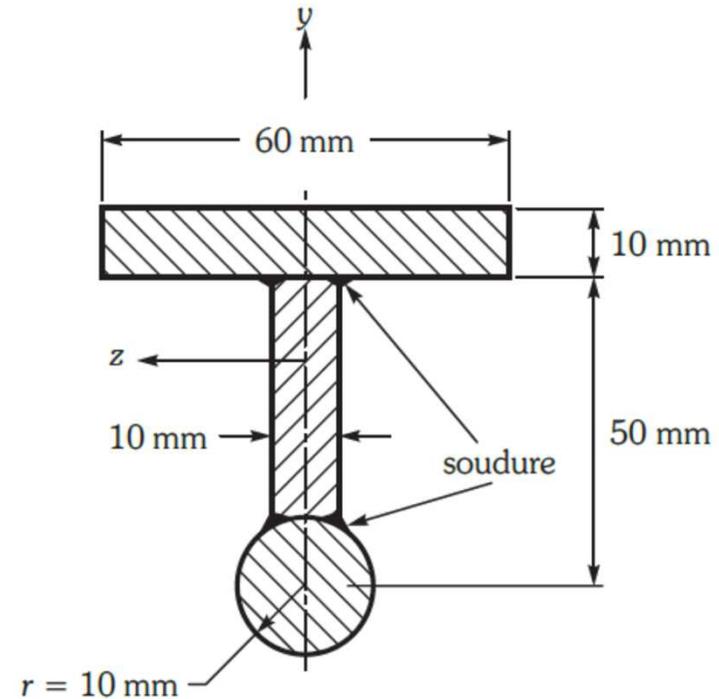
(charge limitée par σ)

Contraintes dans les poutres en flexion

Problème 4.5

On fabrique une poutre par soudage. La figure illustre sa section.

- Déterminer la position de l'axe neutre ainsi que le second moment de surface de la section par rapport à cet axe.
- Sachant que le matériau de la poutre ne peut pas supporter une contrainte normale qui excède 140 MPa, calculer le moment fléchissant maximal que pourra supporter la poutre.
- On assemble la poutre à l'aide de quatre cordons de soudure et sur deux plans d'assemblage. Chaque cordon peut résister à une force de cisaillement de 90 kN/m. Calculer l'effort tranchant maximal qu'on peut appliquer à cette poutre.



Réponses : a) $I_z = 0,7001 \times 10^{-6} \text{ m}^4$

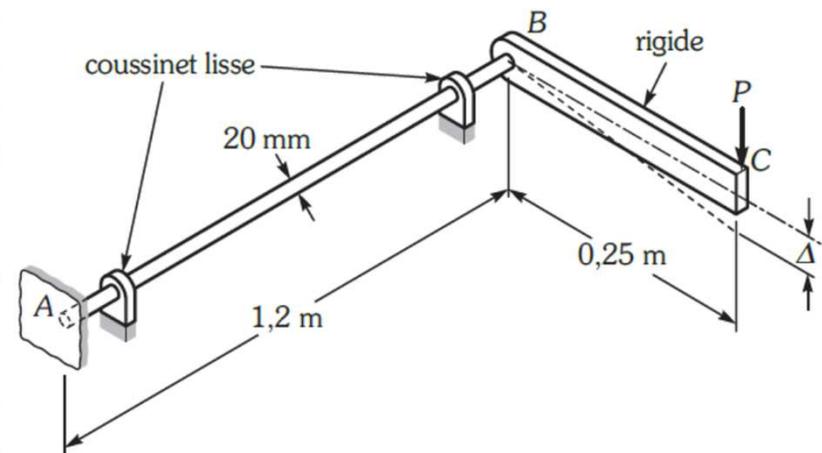
b) $M_{\max} = 2,215 \text{ kN}\cdot\text{m}$ c) $V_{\max} = 10,1 \text{ kN}$

Torsion des sections circulaires

Problème 6.1

La figure montre schématiquement une barre de torsion en acier de 20 mm de diamètre (module de rigidité G de 77 GPa) qui se comporte comme un ressort (on utilise couramment la barre de torsion dans l'industrie de l'automobile). On a bien placé les coussinets lisses pour rendre l'effet de la flexion négligeable.

- Déterminer la rigidité k du système ($k = P/\Delta$ exprimé en newtons par mètre) pour de faibles déformations.
- Quelle est la valeur maximale de la charge P si la contrainte de cisaillement qui agit dans la barre ne doit pas excéder 45 MPa ?



Réponses : a) $k = 1,613 \times 10^4$ N/m

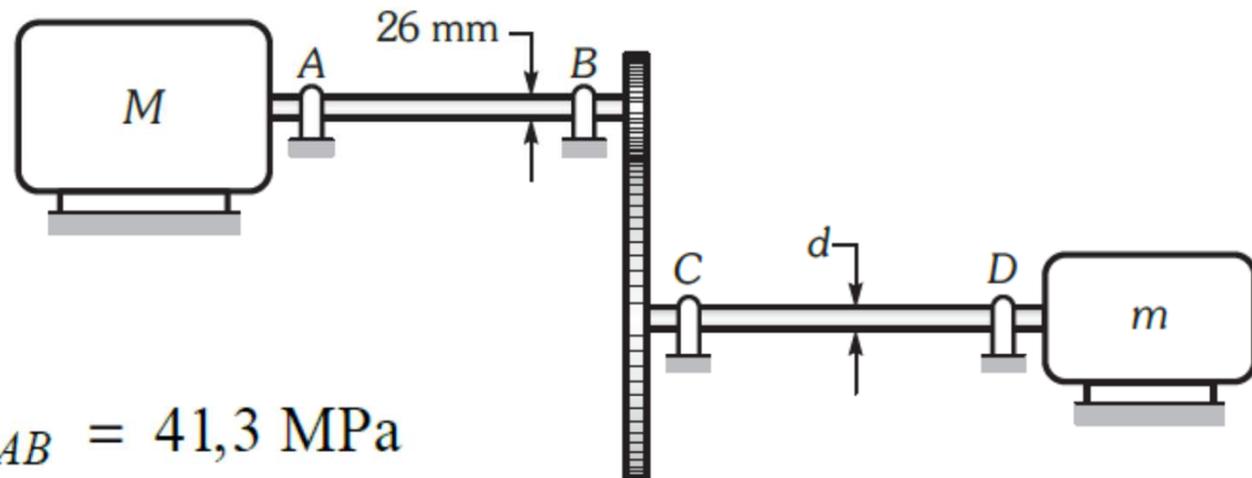
b) $P_{\max} = 283$ N

Torsion des sections circulaires

Problème 6.3

Un moteur M de 12 hp, qui tourne à 600 tours/min, doit entraîner une machine m par l'entremise d'un réducteur de vitesse ayant un rapport 3:1. On néglige l'effet de la flexion.

- a) Calculer la contrainte de cisaillement maximale qui agit dans l'arbre AB .



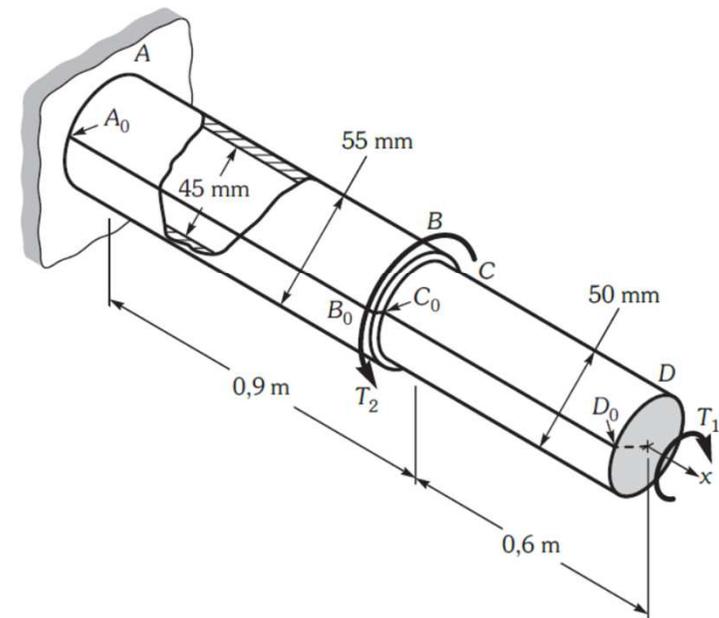
Réponses : a) $\tau_{AB} = 41,3 \text{ MPa}$

Torsion des sections circulaires

Problème 6.7

Un système est composé de deux cylindres concentriques AB (section creuse) et CD (section pleine), fixés solidement entre eux bout à bout aux extrémités B et C . Les matériaux des cylindres ont les modules de cisaillement suivants : $G_{AB} = 42 \text{ GPa}$ et $G_{CD} = 77 \text{ GPa}$. L'extrémité A étant encadrée, le système est soumis aux couples de torsion $T_1 = 1600 \text{ N}\cdot\text{m}$ et T_2 (inconnu).

- a) Calculer la contrainte maximale en cisaillement qui agit dans chaque cylindre et l'angle de rotation de l'extrémité D (en fonction de T_2).



Réponses :

$$\text{a) } \tau_{AB} = 5,547 \times 10^4 T_2 - 88,749 \times 10^6 \text{ Pa ;}$$

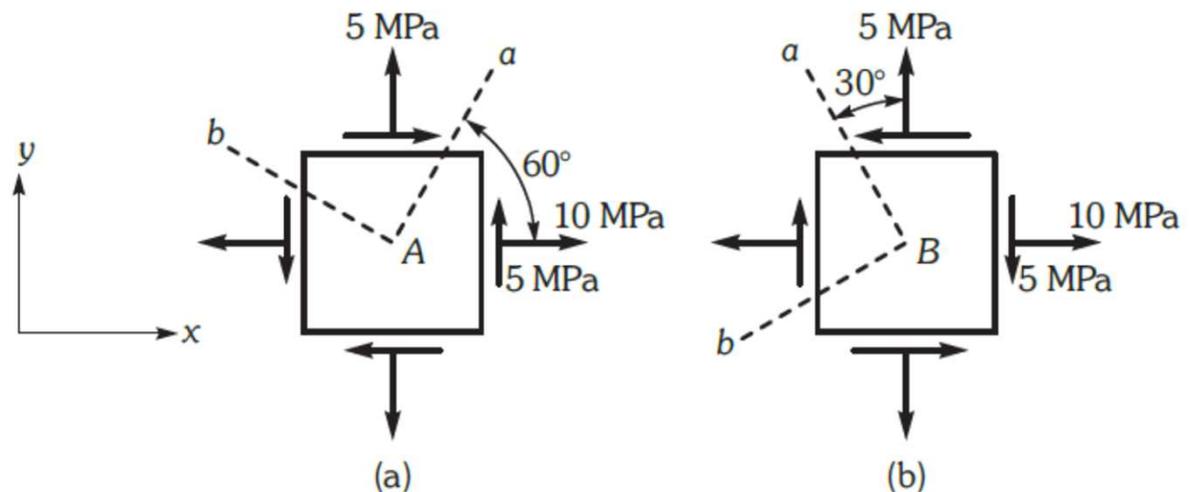
$$\tau_{CD} = -65,19 \times 10^6 \text{ Pa ;}$$

$$\varphi_D = 4,322 \times 10^{-5} T_2 - 8,9474 \times 10^{-2} \text{ (négatif suivant le sens de } T_1 \text{).}$$

Superposition des contraintes

Problème 7.3

Tracer le cercle de Mohr et déterminer les contraintes normales maximale et minimale pour chacun des états plans de contraintes montrés. Illustrer aussi les contraintes qui agissent sur un élément orienté suivant le système d'axes (a, b) , comme indiqué pour chaque cas.



Réponses :

$$\sigma_a = 10,58; \sigma_b = 4,42; \tau_{ab} = -4,67 \text{ (fig. a)}$$

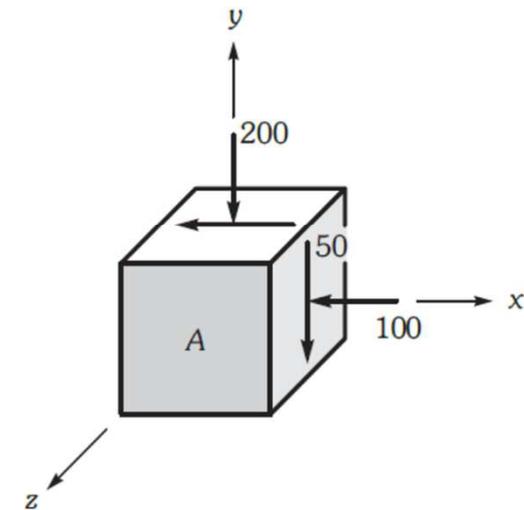
$$\sigma_a = 10,58; \sigma_b = 4,42; \tau_{ab} = 4,67 \text{ (fig. b)}$$

Superposition des contraintes

Problème 7.4

Soit l'élément soumis aux contraintes illustrées (en mégapascals). Tracer le cercle de Mohr représentant cet état de contrainte dans le plan xy :

- Déterminer les contraintes principales ainsi que leur direction ; représenter les résultats à l'aide d'un élément orienté suivant les directions principales.
- Calculer la contrainte de cisaillement maximale produite dans l'élément.



Réponses :

a) $\sigma_1 = -79,3$; $\sigma_2 = -220,7$; $\sigma_3 = 0$; $2\theta_1 = -45^\circ$

b) $\tau_{\max} = 110,4$

Superposition des contraintes

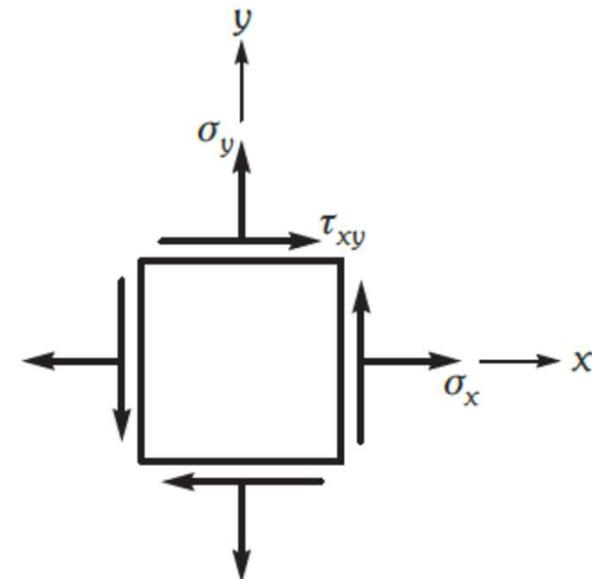
Problème 7.5

Un élément est en état plan de contrainte avec $\sigma_x = 150$ MPa. Sachant que les contraintes principales de cet élément sont de 200 et -100 MPa, calculer σ_y ainsi que τ_{xy} et indiquer la direction de la contrainte principale majeure par rapport à l'axe des x .

Réponses :

Il y a deux possibilités :

- $\sigma_y = -50$ MPa et $\tau_{xy} = 111,8$ MPa ;
- $\sigma_y = -50$ MPa et $\tau_{xy} = -111,8$ MPa.



Superposition des contraintes

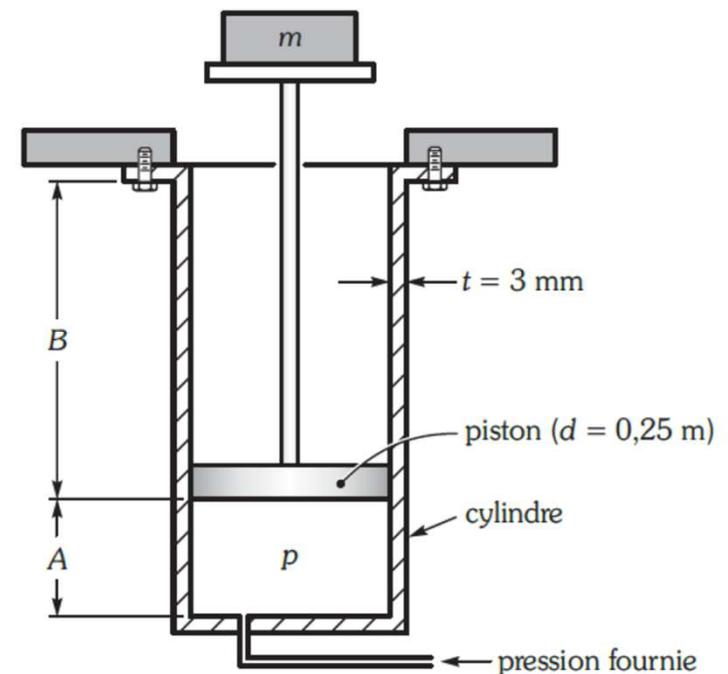
Problème 7.10

Une masse m de 10 000 kg est soutenue par un vérin sous pression p . Le système illustré est en équilibre.

- Quelle est la pression interne p du cylindre ?
- Calculer les contraintes normales qui agissent dans la paroi du cylindre dans les zones A et B.

Réponses :

- $p = 1,996 \text{ MPa}$
- Zone A : $\sigma_\theta = 83,2 \text{ MPa}$; $\sigma_x = 41,6 \text{ MPa}$.
Zone B : $\sigma_\theta = 0$; $\sigma_x = 41,6 \text{ MPa}$.



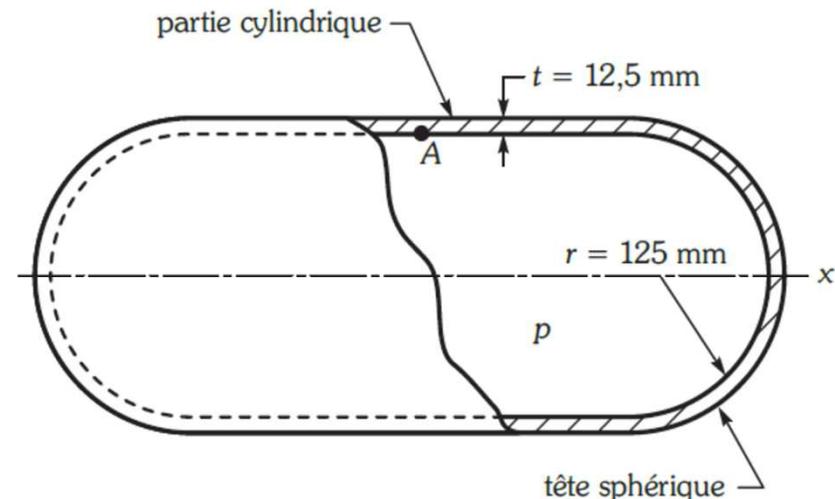
Superposition des contraintes

Problème 7.11

Un réservoir à paroi mince, formé d'un cylindre et de deux têtes sphériques, est soumis à une pression interne p de 20 MPa.

Démontrer que la force axiale F_x due à la pression p sur la tête sphérique est donnée par $F_x = \pi p r^2$.

- Calculer les contraintes dans la partie cylindrique du réservoir.
- Pour un élément situé à l'intérieur du cylindre :
 - représenter l'état de contrainte dans chacun des trois plans principaux à l'aide des cercles de Mohr ;
 - calculer ensuite la contrainte maximale de cisaillement et indiquer clairement par un schéma le plan où se produit cette contrainte.



Réponses : a) $\sigma_\theta = 200 \text{ MPa}$; $\sigma_x = 100 \text{ MPa}$; $\sigma_r = -20 \text{ MPa}$.

b) $\tau_{\max} = 110 \text{ MPa}$ dans le plan $r\theta$

Superposition des contraintes

Problème 7.15

On applique une force P de 80 kN dans le plan xy à un élément de machine.

Calculer les contraintes principales et leur orientation aux points C , D et K .

Réponses :

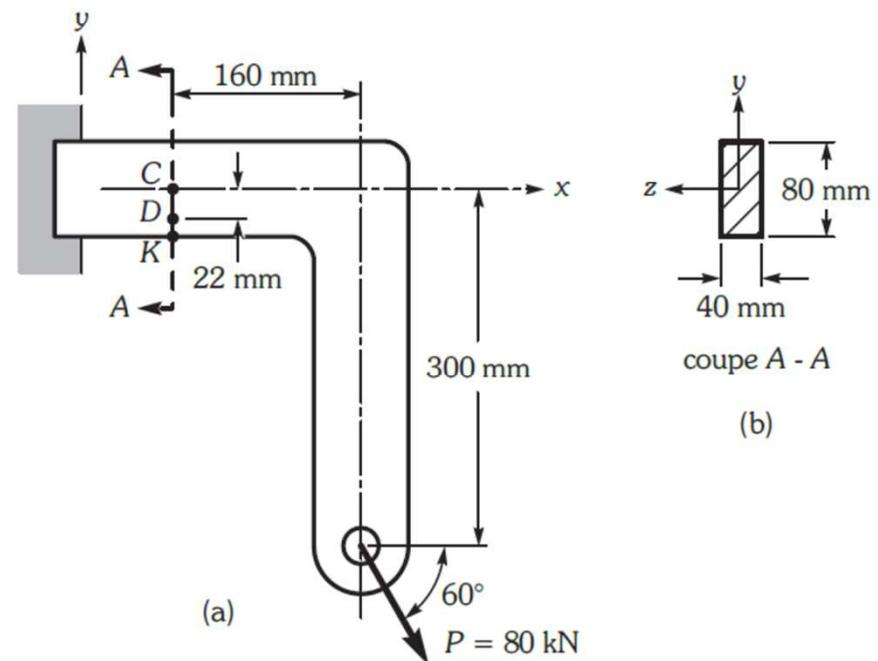
Point C : $\sigma_1 = 39,34$ MPa ;

$\sigma_2 = -26,84$ MPa ; $\theta_1 = -39,6^\circ$.

Point D : $\sigma_1 = 37,85$ MPa ;

$\sigma_2 = -13,56$ MPa ; $\theta_1 = -30,9^\circ$.

Point K : $\sigma_1 = \sigma_x = 33,94$ MPa ; $\sigma_2 = 0$.



Superposition des contraintes

Problème 7.16

La figure illustre un tube fermé (rayon moyen r de 60 mm et épaisseur de la paroi t de 5 mm), encastré à une extrémité et muni d'un barreau rigide horizontal BC à l'autre extrémité. On soumet le tube à une pression interne p de 0,8 MPa et à une force verticale F de 1,8 kN.

Calculer les contraintes principales qui s'exercent dans les éléments situés aux points A_1 et A_2 . Pour chaque cas, montrer les composantes par un schéma.

Réponses :

Point A_1 : $\sigma_1 = 29,05$ MPa ; $\sigma_2 = 1,27$ MPa ;

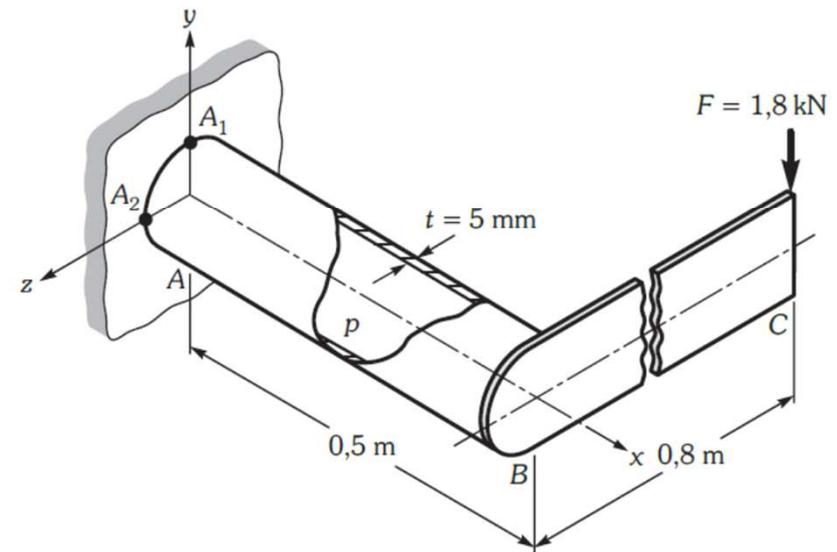
$$\sigma_3 = \sigma_y = 0 ;$$

$$\theta_1 = -56,8^\circ \text{ par rapport à } z \text{ dans le plan } zx.$$

Point A_2 : $\sigma_1 = 18,28$ MPa ; $\sigma_2 = -3,88$ MPa ;

$$\sigma_3 = \sigma_z = 0 ;$$

$$\theta_1 = 51,3^\circ \text{ par rapport à } x \text{ dans le plan } xy.$$



Critères de défaillance des matériaux

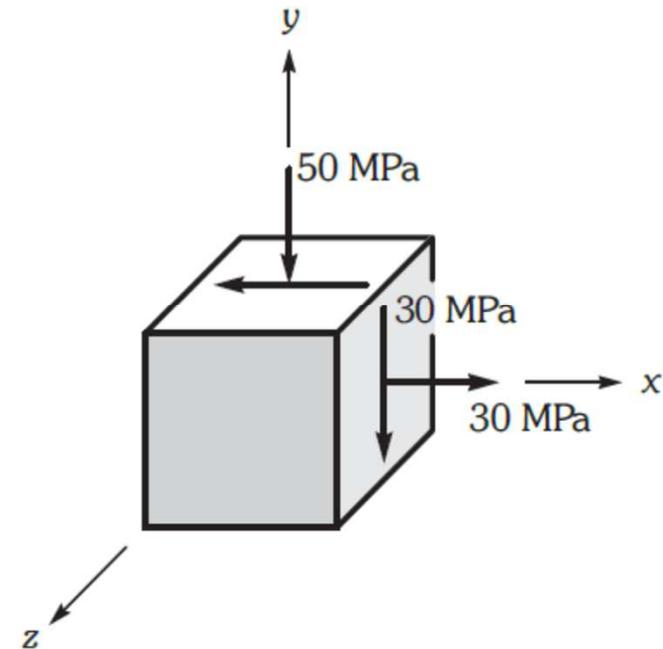
Problème 10.3

La figure illustre l'état de contrainte d'un élément. Le matériau possède une contrainte uniaxiale d'écoulement S_Y de 300 MPa.

Calculer les facteurs de sécurité FS d'après le critère de Tresca et d'après le critère de von Mises, en relation avec l'écoulement plastique de l'élément.

Réponses :

Tresca, $FS = 3,0$; von Mises, $FS = 3,4$.

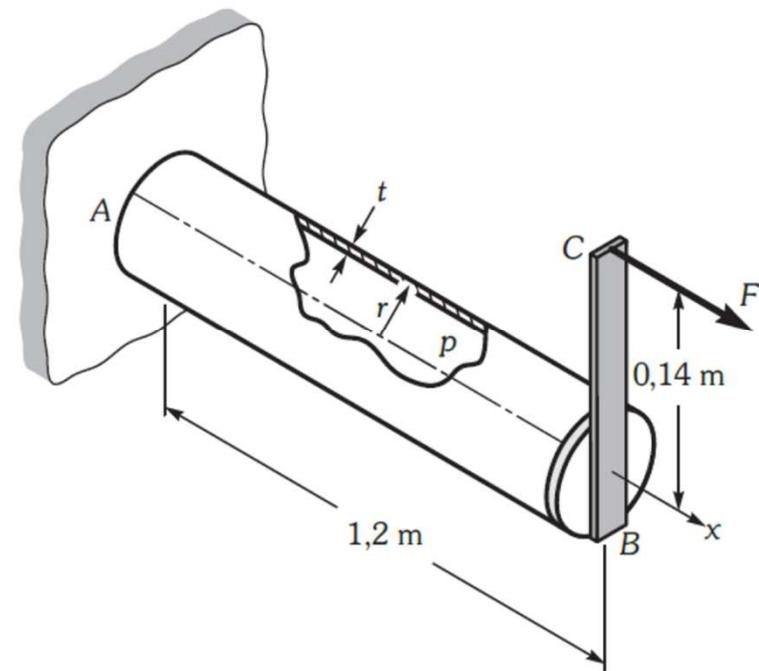


Critères de défaillance des matériaux

Problème 10.7

Un cylindre fermé à paroi mince (rayon r de 50 mm ; épaisseur de la paroi t de 2,5 mm), est encastré à une extrémité et muni d'un bras rigide BC . Le cylindre doit supporter une pression interne p de 1,4 MPa et transmettre une force excentrée F suivant la direction longitudinale. Son matériau possède une limite d'écoulement uniaxial S_Y de 120 MPa.

Déterminer la plus grande force F qu'on pourra appliquer au cylindre en considérant un facteur de sécurité de 3,4.



Réponses :

$$F_{\max} = 2481 \text{ N}$$

Critères de défaillance des matériaux

Problème 10.8

Un cylindre fermé à paroi mince (rayon r de 400 mm ; épaisseur de la paroi t de 20 mm), est soumis simultanément à une pression interne p de 1,2 MPa, à une force axiale F (en tension ou en compression) et à un moment de torsion T de 100 kN·m.

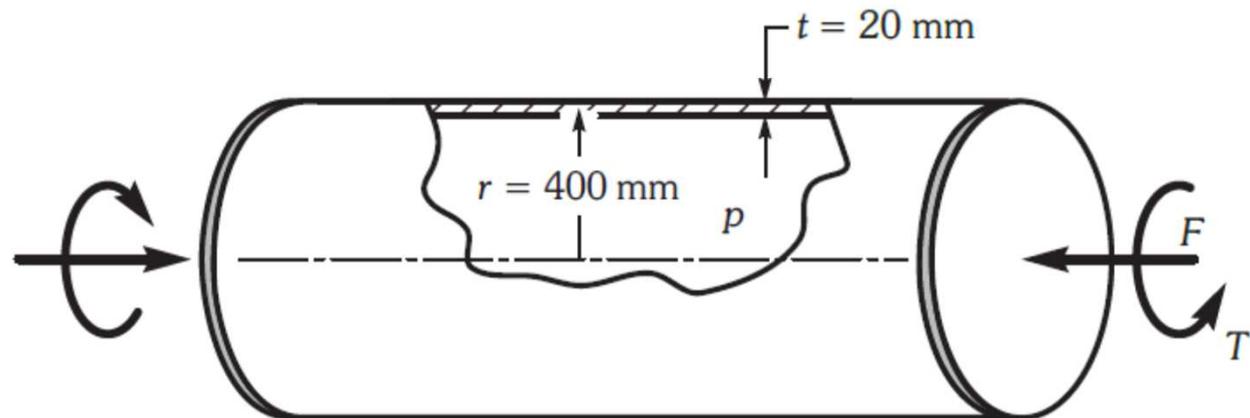
Spécifier pour les deux cas suivants, et en considérant un FS de 2,8, la contrainte uniaxiale minimale d'écoulement du matériau pour que soient évitées des déformations plastiques dans le cylindre :

- $F = 160$ kN en tension ;
- $F = 800$ kN en compression.

Réponses :

D'après le critère de Tresca :

- $S_Y = 73,47$ MPa
- $S_Y = 82,98$ MPa



Critères de défaillance des matériaux

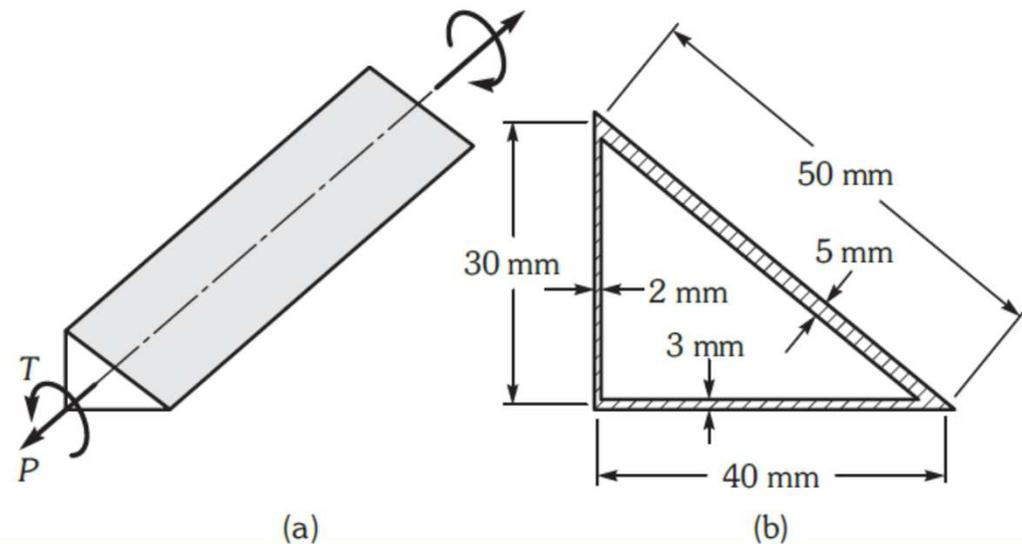
Problème 10.9

On soumet une membrure (fig. a) ayant la section tubulaire illustrée (fig. b) simultanément à une force axiale en traction P de 25 kN et à un couple de torsion T . Le matériau a une contrainte uniaxiale d'écoulement S_Y de 420 MPa.

Déterminer la plus grande valeur de T qu'on peut appliquer à la membrure en considérant un facteur de sécurité de 4 (ignorer l'effet de concentration de contrainte).

Réponses :

$$T_{\max} = 104,9 \text{ N}\cdot\text{m} \text{ (Tresca)}$$



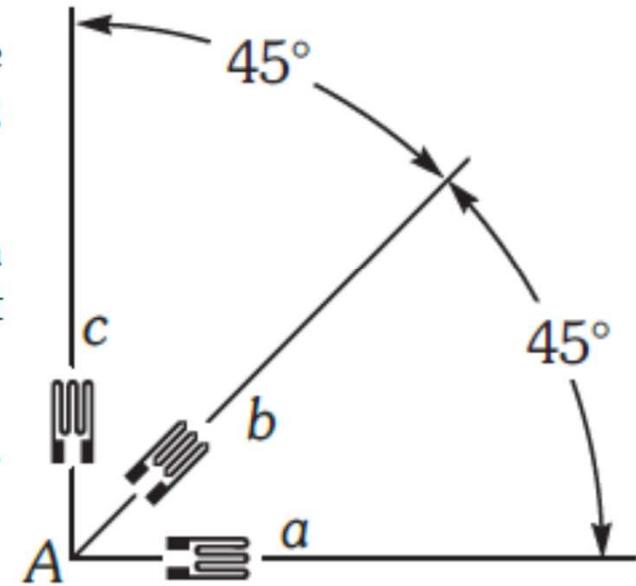
Déformations

Problème 8.9

Une rosette à 45° , placée au point A d'une composante chargée, donne les déformations suivantes : $\varepsilon_a = 1000 \mu$; $\varepsilon_b = 900 \mu$; $\varepsilon_c = -200 \mu$.

Déterminer les déformations principales et la déformation de cisaillement maximale en ce point ; spécifier également leur orientation.

Représenter cet état de déformation par un cercle de Mohr.



Réponses :

$$\varepsilon_1 = 1181\mu ; \varepsilon_2 = -381\mu ; \gamma_{\max} = 1562\mu ;$$

$$\theta_1 = 19,9^\circ \text{ (par rapport à } a\text{)}.$$

Déformations

Problème 8.13

La rosette illustrée enregistre comme suit les déformations au point Q d'un élément de machine : $\varepsilon_i = -200 \mu$; $\varepsilon_j = -400 \mu$; $\varepsilon_k = -800 \mu$.

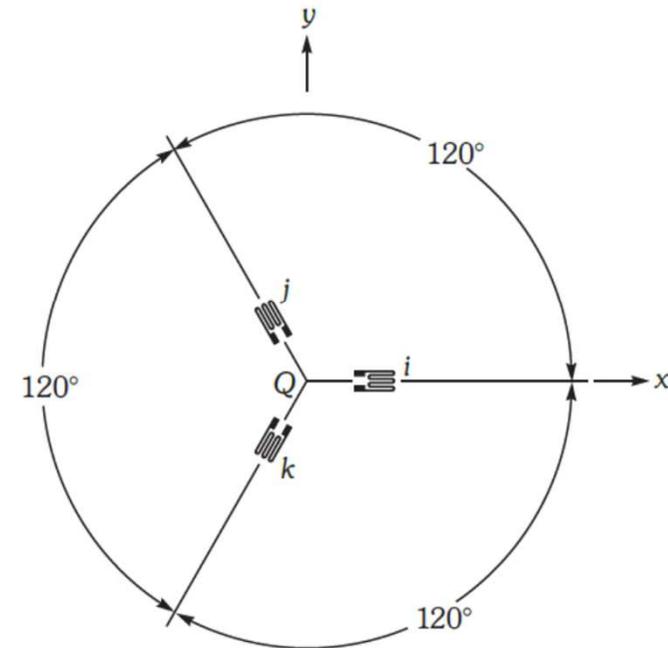
Déterminer l'état de déformation au point Q . Quelles seront les déformations normales maximale et minimale?

Réponses :

$$\varepsilon_x = -200 \mu ; \varepsilon_y = -733 \mu ; \gamma_{xy} = -462 \mu ;$$

$$\varepsilon_1 = -114 \mu ; \varepsilon_2 = -819 \mu ;$$

$$\theta_1 = -20,4^\circ \text{ (par rapport à } x \text{)}$$



Relation contraintes / déformations

Problème 9.5

Soit une poutre de section rectangulaire ayant deux jauges d'extensométrie a et b collées aux parois. Le matériau de la poutre possède un module d'élasticité E et un coefficient de Poisson ν .

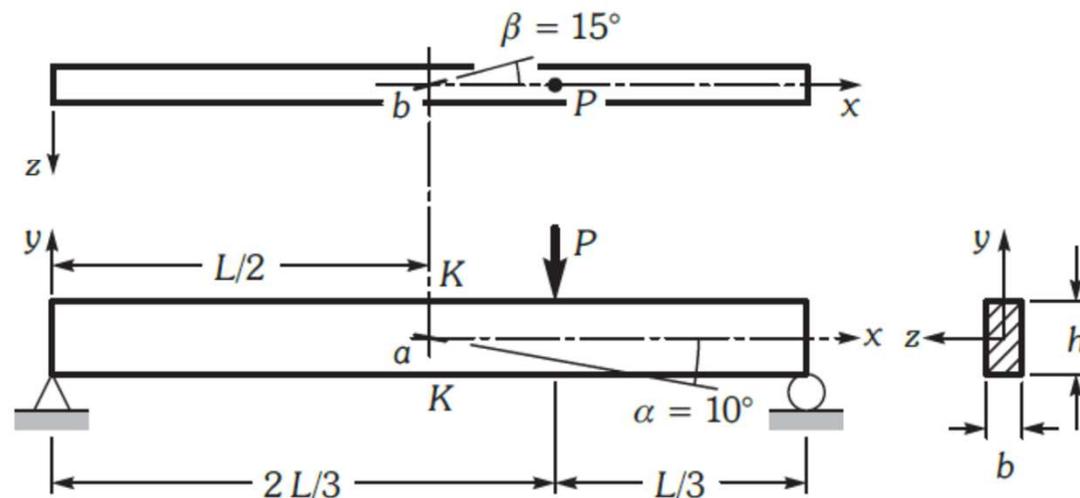
Développer la relation permettant de déduire la charge P , et ce en fonction de la déformation (ε) enregistrée par :

- la jauge a : ε_a ;
- la jauge b : ε_b .

Réponses :

$$a) P = \frac{2Ebh}{(1 + \nu)\sin 2\alpha} \varepsilon_a$$

$$b) P = \frac{-2Ebh^2}{L[(1 - \nu) + (1 + \nu)\cos 2\beta]} \varepsilon_b$$

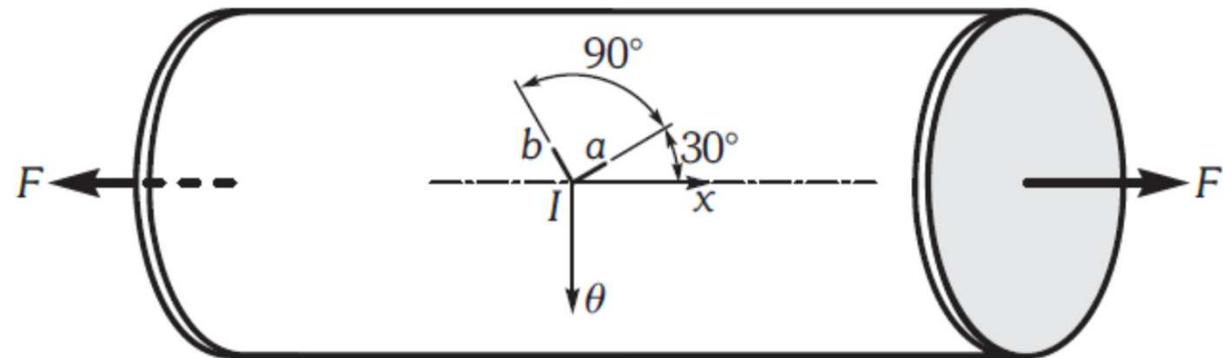


Relation contraintes / déformations

Problème 9.6

Un cylindre fermé à paroi mince est muni de deux jauges d'extensométrie a et b collées à la surface extérieure. Ce cylindre a un rayon r de 240 mm et l'épaisseur t de sa paroi est de 8 mm ; le matériau utilisé a un module d'élasticité E de 200 GPa et un coefficient de Poisson ν de 0,3. On le soumet simultanément à une pression interne p et à une force axiale F (en tension ou en compression), et les jauges enregistrent les déformations suivantes : $\varepsilon_a = -120 \mu$; $\varepsilon_b = 180 \mu$.

Calculer les valeurs de p et F .



Réponses :

$$p = 1,824 \text{ MPa} ; F = -783,5 \text{ kN (i.e. en compression).}$$

Torsion des sections fermées, ouvertes et composées

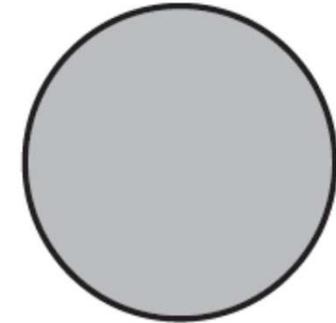
Problème 16.2

Les cinq membrures ci-contre, qui ont des sections pleines de la même aire, soit 7854 mm^2 , sont soumises à un moment de torsion T de $10 \text{ kN}\cdot\text{m}$:

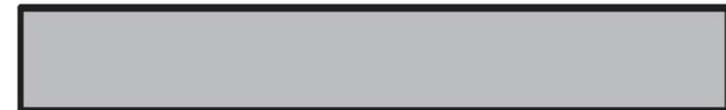
- a) section circulaire,
- e) section rectangulaire mince ayant un rapport de côtés b/t de 10.

Le matériau utilisé a un module de cisaillement G de 26 GPa .

Comparer la contrainte de cisaillement maximale et l'angle de torsion unitaire de ces sections.



(a)



(e)

Réponses :

a) $(\tau)_{\max} = 50,9 \text{ MPa}$; $\beta = 2,24^\circ/\text{m}$.

e) $(\tau)_{\max} = 145,7 \text{ MPa}$; $\beta = 11,46^\circ/\text{m}$.

Torsion des sections fermées, ouvertes et composées

Problème 16.3

Deux tubes de rayon moyen r et d'épaisseur uniforme t (avec $r/t = 15$) sont fabriqués du même matériau qui a un module de cisaillement G . Le contour du tube a est fermé tandis que le tube b a une fente longitudinale. On applique un moment de torsion T de même intensité à ces tubes.

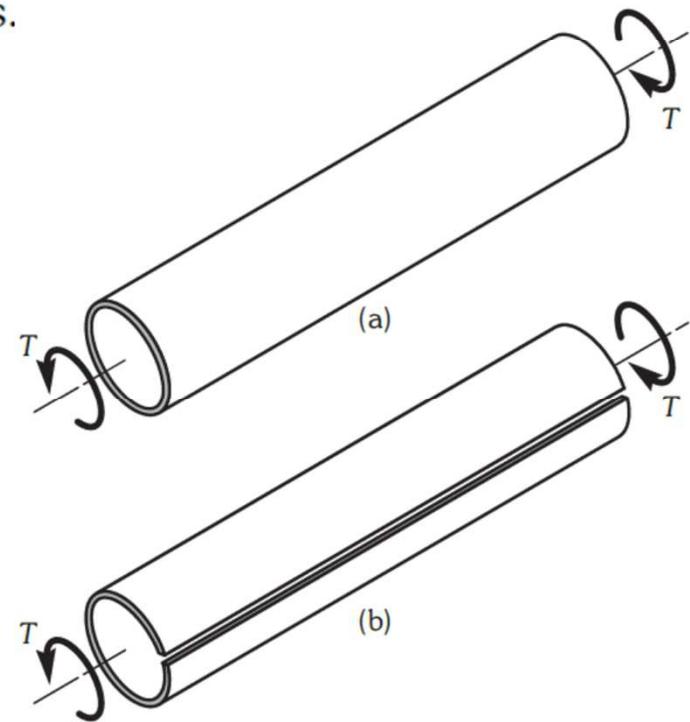
Déterminer le rapport entre :

- les contraintes de cisaillement respectives ;
- les angles respectifs de rotation unitaire.

Réponses :

$$\text{a) } \tau_b / \tau_a = 3(r/t) = 45$$

$$\text{b) } \beta_b / \beta_a = 3(r/t)^2 = 675$$



Torsion des sections fermées, ouvertes et composées

Problème 16.5

Deux membrures creuses de section carrée ayant des dimensions globales identiques (de côté b) et une épaisseur uniforme t sont fabriquées du même matériau qui a un module de cisaillement G . La seconde membrure comporte une fente longitudinale.

Si on soumet ces membrures au même couple de torsion T , déterminer :

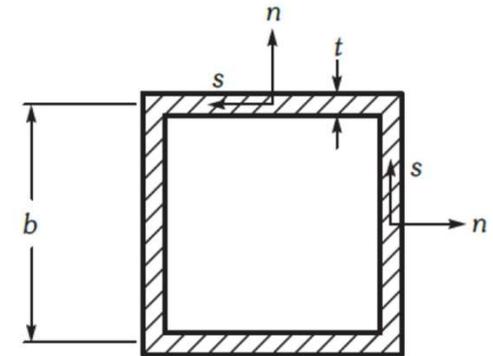
- la constante de torsion J ;
- l'angle de torsion unitaire ;
- la contrainte de cisaillement maximale (ne pas tenir compte des concentrations de contrainte).

Illustrer par un schéma la répartition de la contrainte de cisaillement à travers la paroi.

$$\text{a) } J_a = b^3 t ; J_b = 4bt^3/3.$$

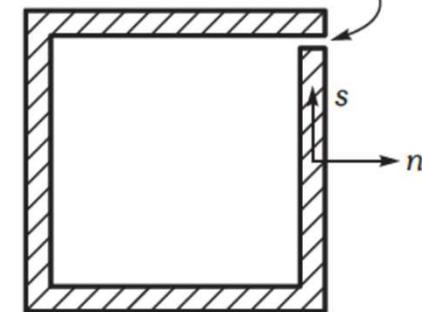
Réponses : $\text{b) } \beta_a = \frac{T}{Gb^3 t} ; \beta_b = \frac{3T}{4Gbt^3}.$

$$\text{c) } (\tau_{xs})_a = \frac{T}{2b^2 t} ; (\tau_{xs})_b = \pm \frac{3T}{4bt^2}.$$



(a)

fente longitudinale



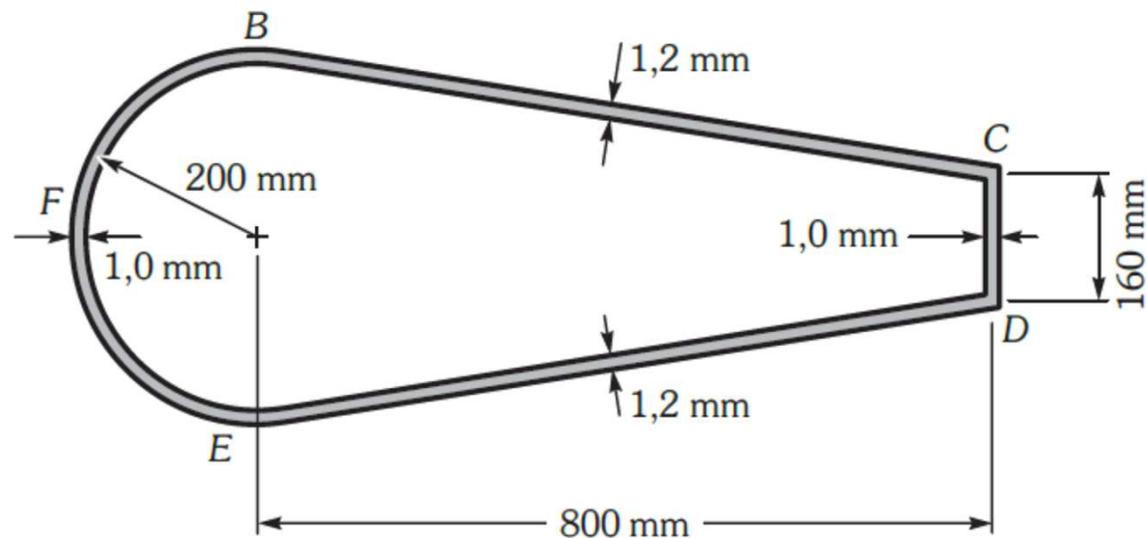
(b)

Torsion des sections fermées, ouvertes et composées

Problème 16.7

La figure illustre schématiquement la section droite d'une aile d'avion de 2,5 m de longueur. Le matériau utilisé a un module de cisaillement G de 27 GPa. Sous l'effet du couple de torsion T , la contrainte de cisaillement et l'angle de rotation entre les deux extrémités de l'aile doivent être inférieurs respectivement à 67 MPa et à $1,2^\circ$.

Déterminer la valeur maximale de T .



Réponses :

$$T_{\max} = 34,84 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

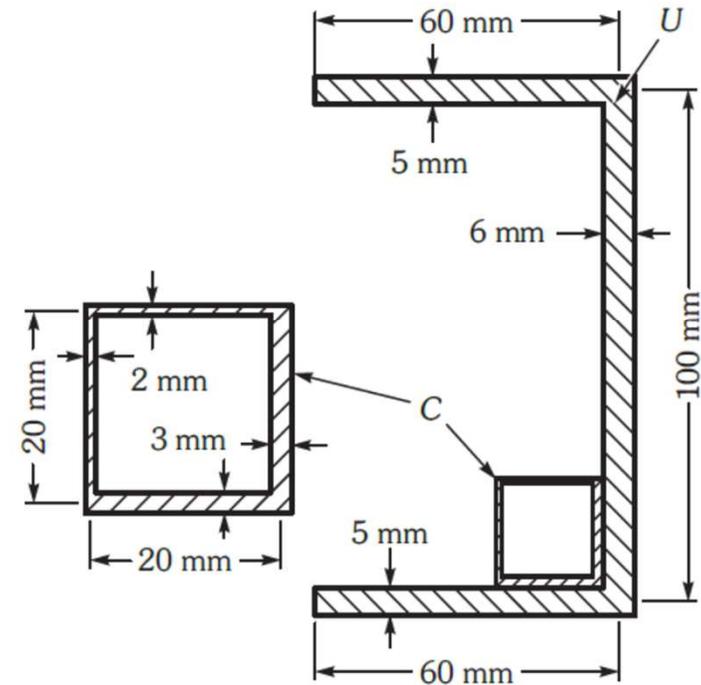
Torsion des sections fermées, ouvertes et composées

Problème 16.8

Une membrure composée est fabriquée d'un profilé en U et d'un tube C de paroi non uniforme. Les deux éléments, fabriqués du même matériau qui a un module de cisaillement G de 70 GPa, sont soudés ensemble uniquement à leurs extrémités. On applique un couple T de 200 N·m sur la membrure.

Calculer :

- l'angle de torsion unitaire ;
- la contrainte de cisaillement maximale agissant dans la section de la membrure.



Réponses :

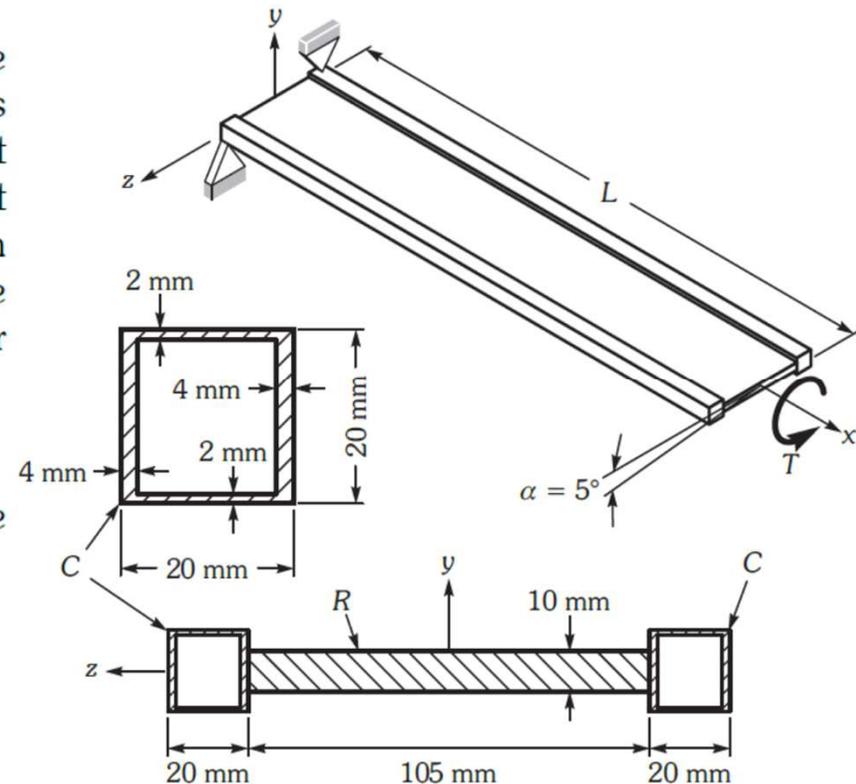
- $\beta = 5,21^\circ/\text{m}$
- $(\tau)_C = 76,4 \text{ MPa}$ (tube) ; $(\tau)_U = 38,2 \text{ MPa}$ (profilé).

Torsion des sections fermées, ouvertes et composées

Problème 16.9

Une membrure composée, de longueur L , est formée d'une plaque R de section rectangulaire à laquelle sont soudés deux tubes C . Les éléments sont du même matériau ayant un module de cisaillement G de 75 GPa. La membrure est simplement supportée à une extrémité et on applique un moment de torsion T à l'autre extrémité libre. Cette dernière doit subir une rotation de 5° lorsque la longueur de la membrure est de 4 m.

- Déterminer la valeur requise de T .
- Calculer ensuite la contrainte de cisaillement maximale qui agit dans la section de la membrure.



Réponses :

- $T = 100,6 \text{ N}\cdot\text{m}$
- $(\tau)_R = 16,34 \text{ MPa}$; $(\tau)_C = 18,82 \text{ MPa}$.

Torsion des sections fermées, ouvertes et composées

Problème 16.10

On fabrique deux membrures de sections différentes à l'aide de plaques d'épaisseur t faites du même matériau et on les soumet à un moment de torsion T .

Calculer la constante de torsion ainsi que la contrainte de cisaillement maximale en fonction de T et des caractéristiques des membrures.

Réponses :

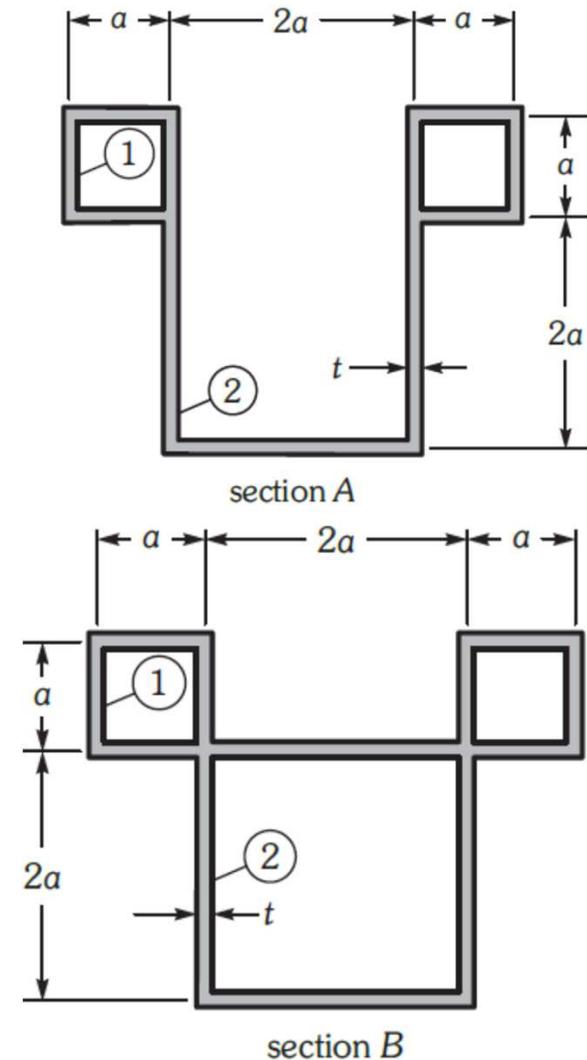
Section A :

$$J_A = 2at(a^2 + t^2); (\tau)_1 = T/[4t(a^2 + t^2)];$$

$$(\tau)_2 = T/[2a(a^2 + t^2)].$$

Section B :

$$J_B = 10a^3t; (\tau)_1 = T/(20a^2t); (\tau)_2 = T/(10a^2t).$$



Torsion des sections fermées, ouvertes et composées

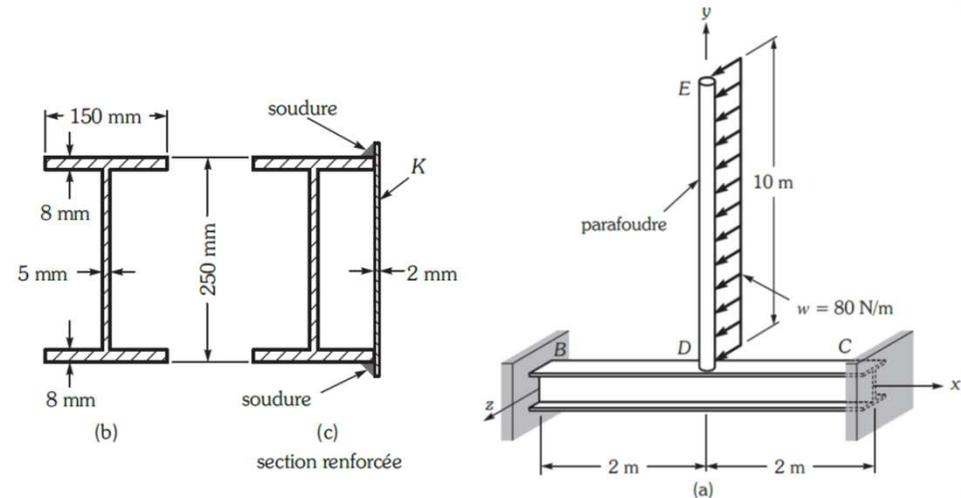
Problème 16.11

La figure (a) illustre schématiquement un parafoudre DE de section circulaire pleine, installé sur une poutre BC de section en H (fig. b). Le matériau utilisé a un module d'élasticité E de 200 GPa, un coefficient de Poisson ν de 0,3 et une limite d'écoulement S_Y de 300 MPa. Dans des conditions extrêmes, le vent exerce une force unitaire de 80 N/m sur le parafoudre (il s'agit d'une force par unité de longueur). Étant donné l'effet du vent, il faut respecter les exigences de rigidité et de résistance suivantes :

1. une rotation maximale à la base du parafoudre inférieure à $1,5^\circ$;
2. un facteur de sécurité supérieur à 1,67.

On ne tient pas compte de l'effet des encastremets sur la rigidité de la poutre en torsion.

- a) En négligeant la flexion de la poutre, vérifier si la capacité de résistance en torsion de cette dernière satisfait aux exigences.
- b) Afin de renforcer la structure, on soude une plaque K de 2 mm d'épaisseur sur toute la longueur de l'un des côtés de la poutre (fig. c). Vérifier si cette structure renforcée est acceptable pour satisfaire aux exigences. Calculer alors le flux de cisaillement transmis par les cordons de soudure.



Réponses :

- a) Exigences non satisfaites, car $\varphi = 50,1^\circ$ et $\tau_{\max} = 269,1$ MPa.
- b) Exigences satisfaites, car $\varphi = 0,43^\circ$ et $\tau_{\max} = 27,87$ MPa ; $q_s = 55,70$ kN/m.

FLEXION GAUCHE

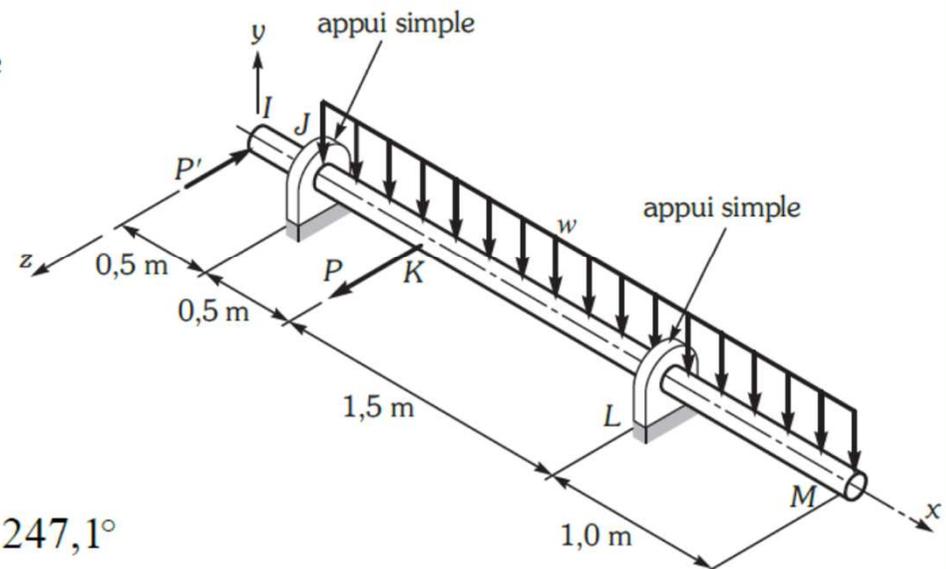
Flexion gauche

Problème 17.3

La poutre $IJLM$ simplement supportée en J et en L est soumise, dans la direction de l'axe des y , à une charge w uniformément répartie et, dans la direction de l'axe des z , à deux charges concentrées (P et $P' = P/2$). La section droite de la poutre est circulaire et son diamètre est de 28 mm.

Tracer les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants en fonction de w et P pour la poutre illustrée.

Lorsque $w = 380 \text{ N/m}$ et $P = 400 \text{ N}$, calculer la contrainte normale maximale en tension.



Réponses :

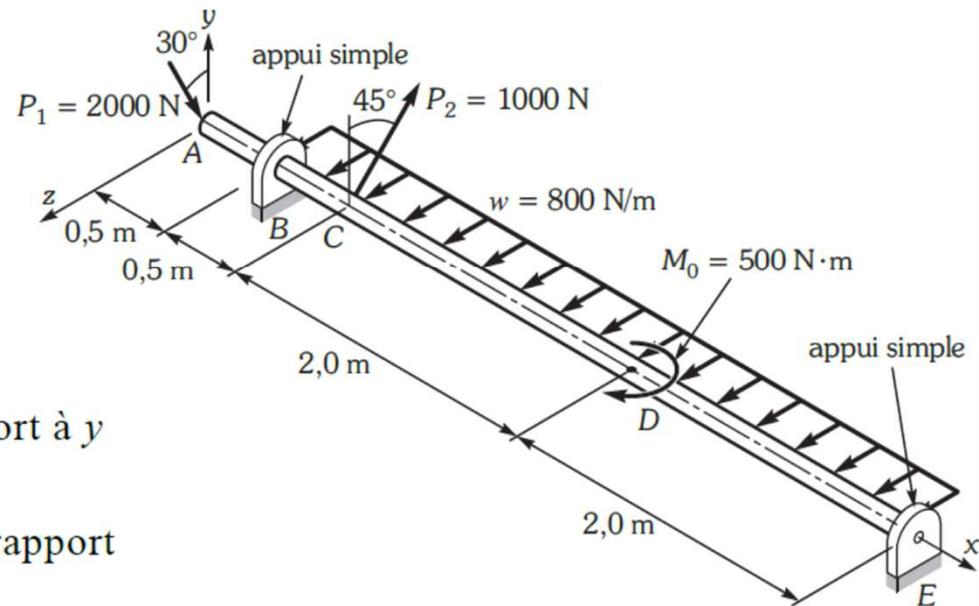
$\sigma_x = 113,3 \text{ MPa}$ (section en K , fibre extrême à $247,1^\circ$ à partir de y dans le sens horaire)

Flexion gauche

Problème 17.4

La poutre $ABCDE$, simplement supportée en B et en E , est soumise à une charge w répartie uniformément (dans la direction z), à un moment M_0 (dans la direction y) et à deux charges concentrées P_1 et P_2 (dans le plan yz).

Tracer les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants pour la poutre et indiquer les valeurs importantes.



Réponses :

$|V|_{\max} = 2000$ N (entre A et B à $30,0^\circ$ par rapport à y
dans le sens horaire)

$|M|_{\max} = 2349$ N·m (section en D à $13,3^\circ$ par rapport
à y dans le sens horaire)

Flexion gauche

Problème 17.5

La figure illustre la section droite d'une poutre.

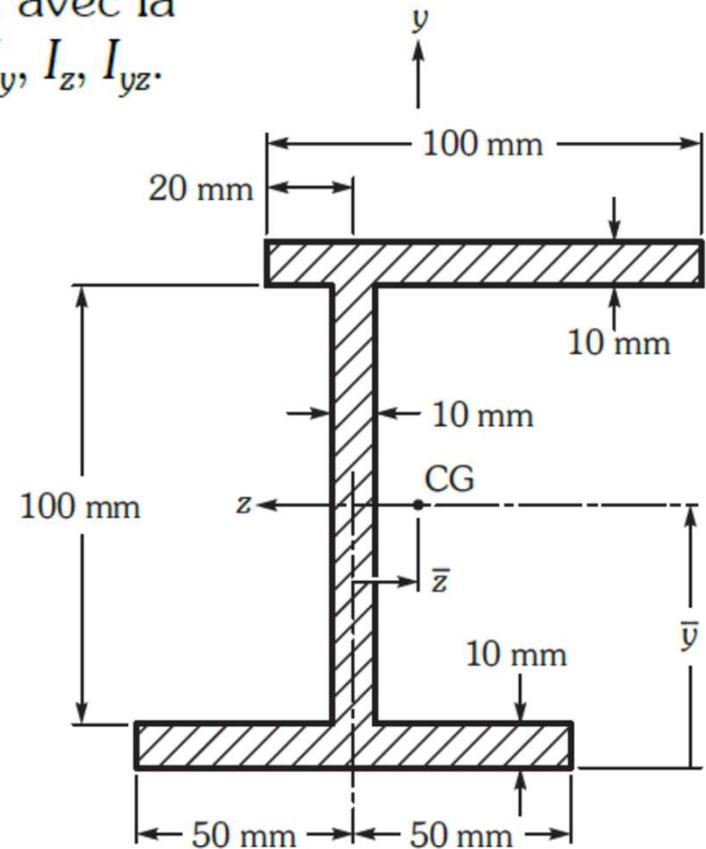
Calculer les propriétés de cette section en relation avec la résistance en flexion, c'est-à-dire avec les valeurs I_y , I_z , I_{yz} .

Réponses :

$$I_y = 2,275 \times 10^6 \text{ mm}^4; I_z = 6,90 \times 10^6 \text{ mm}^4;$$

$$I_{yz} = -1,65 \times 10^6 \text{ mm}^4;$$

(Résultats intermédiaires: $\bar{y} = 60 \text{ mm}$; $\bar{z} = -10 \text{ mm}$.)



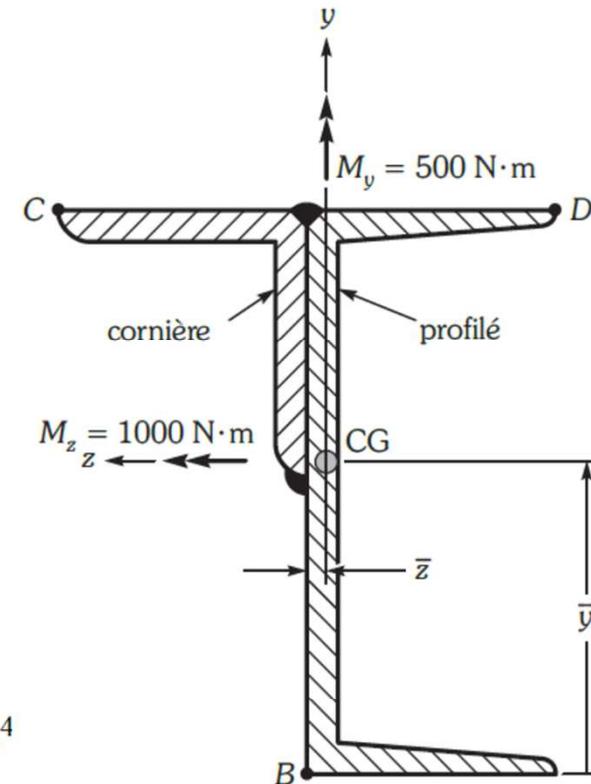
Flexion gauche

Problème 17.6

La figure illustre la section droite d'une poutre fabriquée d'un profilé de type C100 × 11 auquel est soudée une cornière de type L44 × 44 × 4,8. La poutre, dont l'axe longitudinal est orienté suivant l'axe des x , est soumise à un moment fléchissant ayant les composantes suivantes :

$$M_y = 500 \text{ N}\cdot\text{m} \text{ et } M_z = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

- Calculer les propriétés de la section et l'orientation de son axe neutre.
- Étudier la distribution de la contrainte σ_x et indiquer les valeurs importantes.



Réponses :

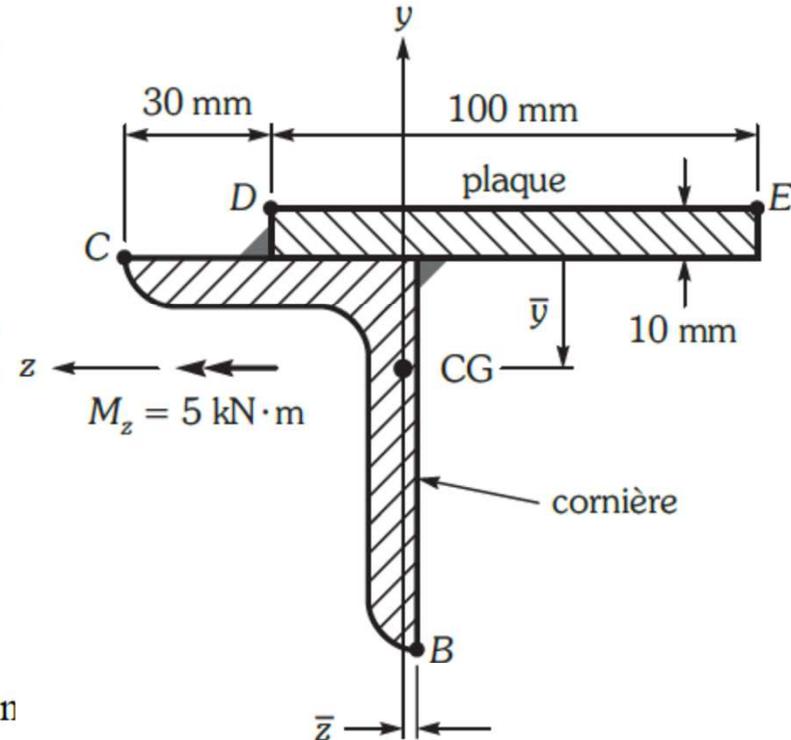
- $I_y = 0,434 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $I_z = 2,435 \times 10^6 \text{ mm}^4$
 $I_{yz} = 0,332 \times 10^6 \text{ mm}^4$;
 $\alpha = 68,8^\circ$ (à partir de l'axe des z et suivant le sens horaire).
- Point C : $\sigma_x = 54,9 \text{ MPa}$ (max. en tens.)
Point D : $\sigma_x = -87,5 \text{ MPa}$ (max. en compr.)
Point B : $\sigma_x = 47,6 \text{ MPa}$

Flexion gauche

Problème 17.7

On fabrique une poutre en soudant une plaque de $100 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ à une cornière de type $L89 \times 64 \times 9,5$. Elle doit supporter un moment fléchissant M_z de $5 \text{ kN}\cdot\text{m}$.

- Calculer les propriétés de la section de la poutre en relation avec sa résistance en flexion et en torsion.
- Déterminer l'orientation de son axe neutre et étudier la répartition de la contrainte σ_x ; indiquer les valeurs importantes.



Réponses :

- $I_y = 1,907 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $I_z = 1,764 \times 10^6 \text{ mm}^4$
 $I_{yz} = -0,245 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $J = 0,140 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
- $\alpha = 7,3^\circ$ (à partir de l'axe des z et suivant le sens antihoraire)
Point B : $\sigma_x = 215,2 \text{ MPa}$ (max. en tens.)
Point D : $\sigma_x = -83,4 \text{ MPa}$ (max. en compr.)

Flexion gauche

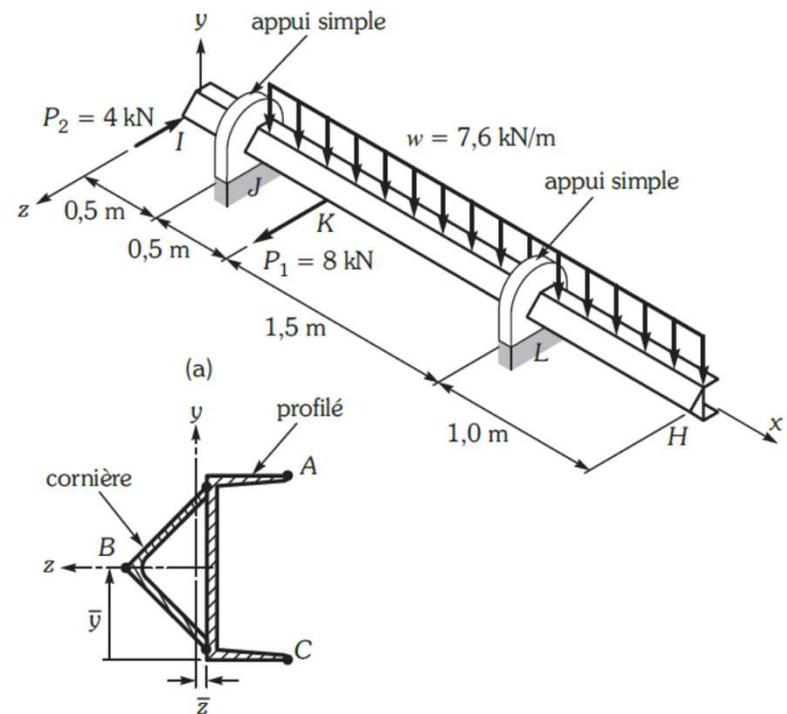
Problème 17.8

Une poutre (fig. a), simplement supportée en J et en L , est fabriquée par l'assemblage d'un profilé de type $C230 \times 20$ et d'une cornière de type $L127 \times 127 \times 7,9$ (fig. b). Elle est soumise à une charge w uniformément répartie de $7,6 \text{ kN/m}$ dans la direction de l'axe des y , de même qu'à deux charges concentrées P_1 et P_2 , respectivement, de 8 et de 4 kN dans la direction de l'axe des z .

Calculer les contraintes normales maximales en tension et en compression à la section en K .

Réponses :

$$\sigma_x = 61,7 \text{ MPa en } B; \quad \sigma_x = -62,3 \text{ MPa en } A.$$

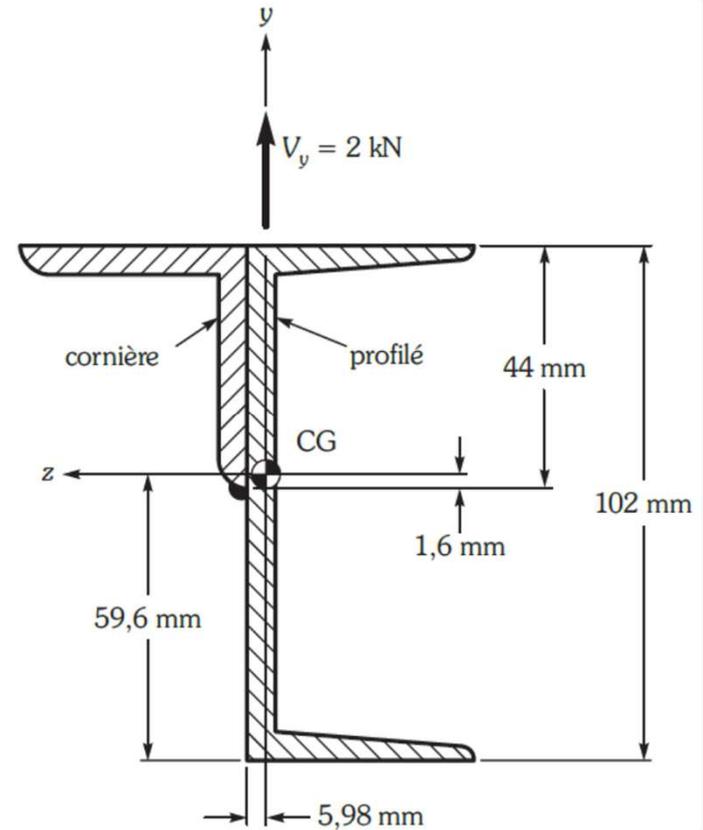


Flexion gauche

Problème 17.9

Une poutre est fabriquée d'un profilé de type C100 × 11 et d'une cornière de type L44 × 44 × 4,8, joints entre eux par un cordon de soudure longitudinale. Elle est soumise à un effort tranchant V_y de 2 kN.

En supposant que la soudure supporte le cisaillement en totalité et en négligeant l'effet de la torsion dû à une excentricité du chargement, calculer le flux de cisaillement qui agit dans la soudure.



Réponses :

$$q_s = 5,58 \text{ kN/m}$$

(Résultats intermédiaires: $I_y = 0,434 \times 10^6 \text{ mm}^4$;

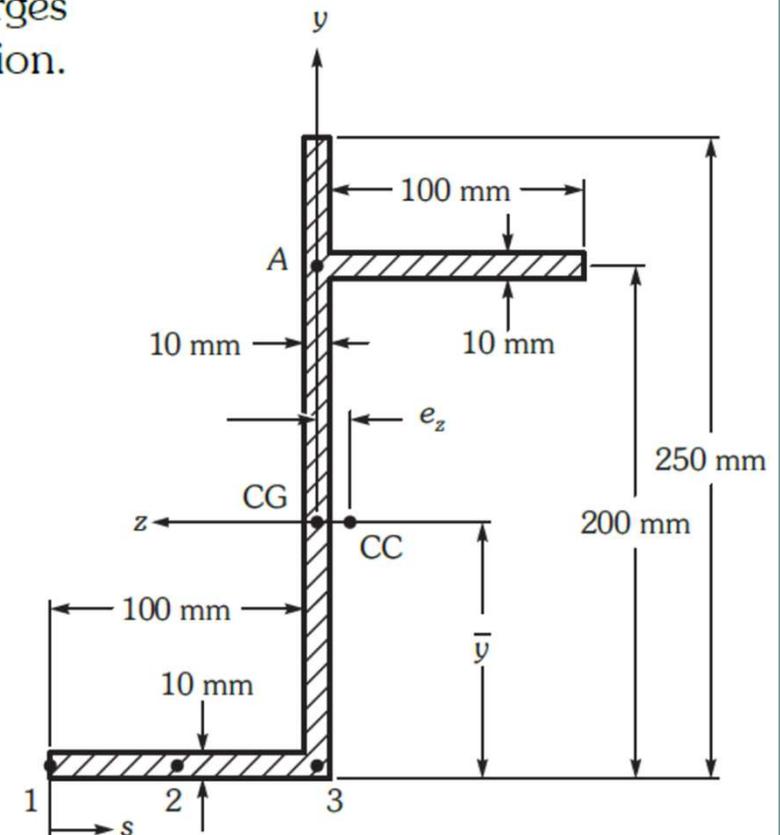
$I_z = 2,435 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $I_{yz} = 0,332 \times 10^6 \text{ mm}^4$.)

Flexion gauche

Problème 17.12

La figure illustre la section droite d'une poutre soumise à des charges concentrées dans la direction de l'axe des y .

Déterminer la position du point d'application des charges (la valeur e_z) pour que la poutre ne subisse aucune torsion.



Réponses :

$$e_z = 7 \text{ mm}$$

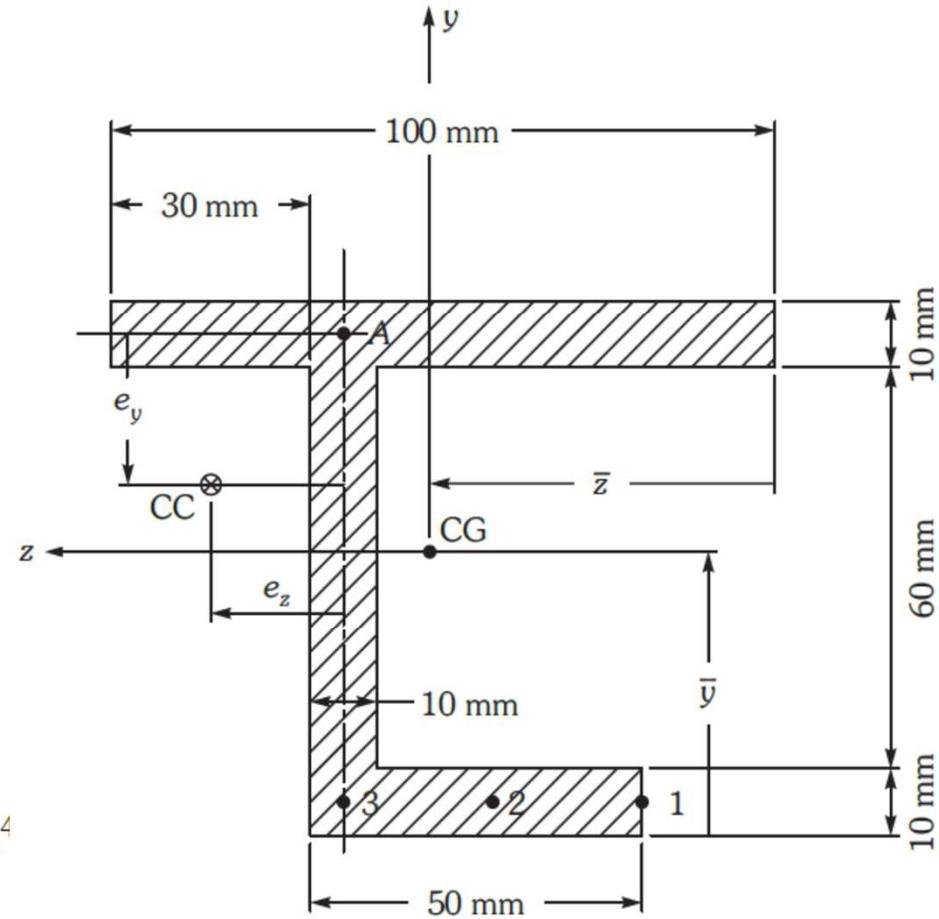
(Résultats intermédiaires: $I_y = 7,74 \times 10^6 \text{ mm}^4$;

$I_z = 32,61 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $I_{yz} = -11,0 \times 10^6 \text{ mm}^4$.)

Flexion gauche

Problème 17.13

Pour la poutre dont la section est illustrée, déterminer la position du centre de cisaillement CC.



Réponses :

$$e_y = -11,49 \text{ mm}; e_z = 16,10 \text{ mm}.$$

(Résultats intermédiaires :

$$\bar{y} = 48,33 \text{ mm}; \bar{z} = 53,10 \text{ mm};$$

$$I_y = 1,070 \times 10^6 \text{ mm}^4; I_z = 1,884 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{yz} = 3,333 \times 10^6 \text{ mm}^4.)$$

INSTABILITÉ, FLAMBEMENT DES COLONNES, CONCEPTION DE POUTRE-COLONNE

Instabilité, flambement des colonnes, conception de poutre-colonne

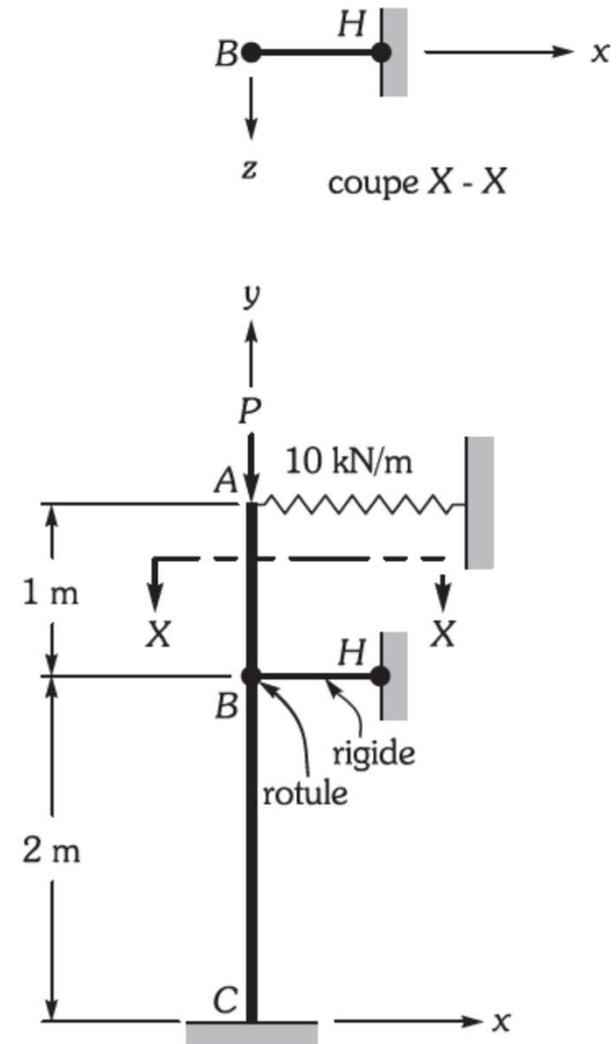
Problème 11.1

Sur le montage illustré, les barreaux élastiques de section circulaire pleine AB (diamètre d_1 de 25 mm ; module d'élasticité E_1 de 70 GPa ; contrainte d'écoulement $(S_Y)_1$ de 120 MPa) et BC (diamètre d_2 de 20 mm ; module d'élasticité E_2 de 210 GPa ; contrainte d'écoulement $(S_Y)_2$ de 180 MPa) sont reliés entre eux par une rotule en B . Le système est en équilibre quand les deux barreaux sont alignés. L'extrémité A et la rotule B ne peuvent se déplacer que dans le plan (x,y) .

On applique une force P en compression à l'extrémité A . Calculer la valeur maximale de P .

Réponses :

$$P_{\max} = 8,3 \text{ kN (flambement de } BC)$$



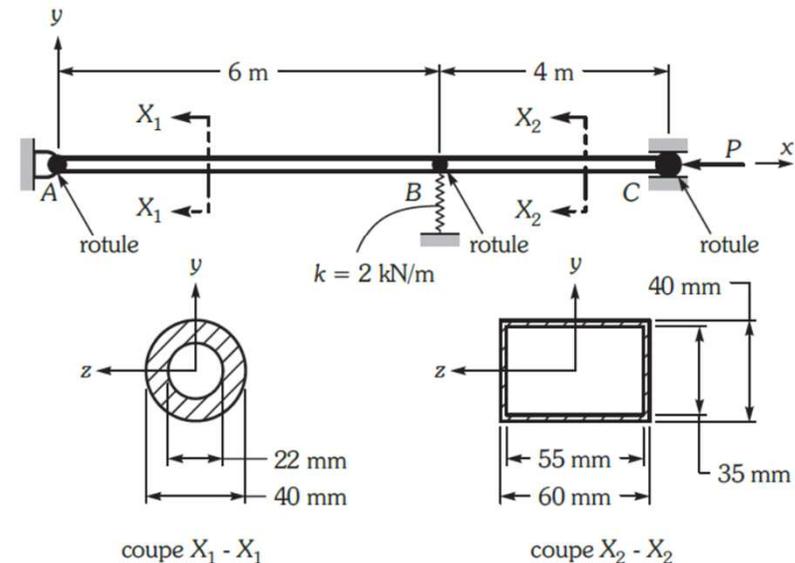
Instabilité, flambement des colonnes, conception de poutre-colonne

Problème 11.2

Un système est composé de deux membrures : AB (module d'élasticité E_1 de 210 GPa ; contrainte d'écoulement $(S_Y)_1$ de 240 MPa) et BC (module d'élasticité E_2 de 70 GPa ; contrainte d'écoulement $(S_Y)_2$ de 120 MPa) reliées entre elles en B par une rotule retenue par un ressort dont la constante k est de 2 kN/m. La section droite de AB est circulaire creuse, tandis que celle de BC est rectangulaire creuse. En supposant que les rotules du système ne se déplacent pas dans la direction de l'axe des z , déterminer la valeur la plus grande de P pour que la contrainte normale induite demeure à l'intérieur des limites suivantes :

- pour le flambement élastique : 25 % de la contrainte critique ;
- pour l'écoulement : 60 % de la limite d'écoulement uniaxial.

Réponses : $P_{\max} = 1,2 \text{ kN}$ (rotation de AB)



Instabilité, flambement des colonnes, conception de poutre-colonne

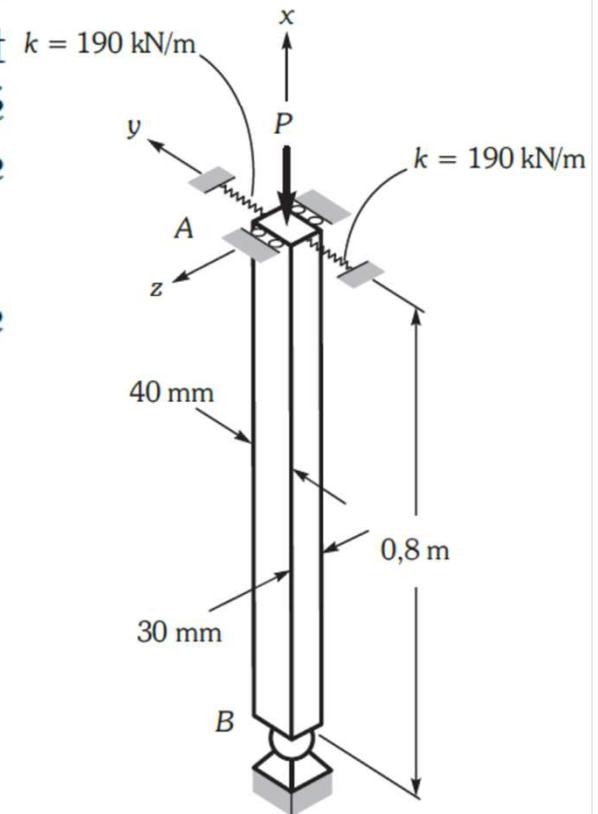
Problème 11.3

Un barreau AB de 0,8 m de longueur et de section rectangulaire 30 mm \times 40 mm, fabriqué en acier ayant un module d'élasticité E de 210 GPa et une contrainte d'écoulement S_Y de 280 MPa, est supporté en B par une rotule et retenu en A par des appuis lisses et des ressorts (l'extrémité A peut subir une rotation autour de l'axe des y). Chaque ressort possède une constante k de 190 kN/m.

Calculer la charge axiale maximale en compression que pourra supporter la colonne.

Réponses :

$$P_{\max} = 291,5 \text{ kN}$$



Instabilité, flambement des colonnes, conception de poutre-colonne

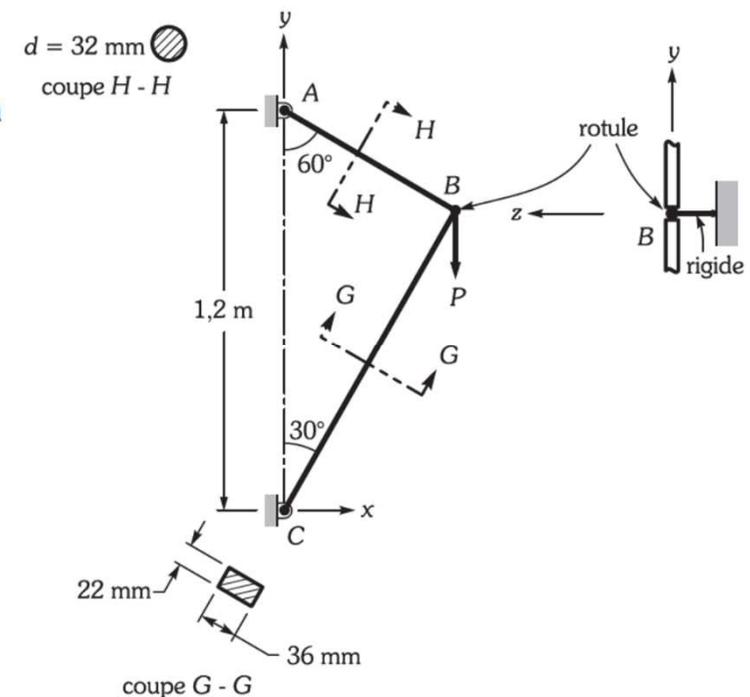
Problème 11.4

Une structure est composée de deux membrures assemblées par des rotules. La membrure AB a une section circulaire de diamètre d de 32 mm, un module d'élasticité E_1 de 70 GPa et une contrainte d'écoulement $(S_Y)_1$ de 105 MPa. La membrure BC a une section rectangulaire de 22 mm \times 36 mm, un module d'élasticité E_2 de 200 GPa et une contrainte d'écoulement $(S_Y)_2$ de 160 MPa.

Déterminer la valeur maximale de la charge P que pourra supporter la structure.

Réponses :

$$P_{\max} = 67,41 \text{ kN (flambement de BC)}$$



Instabilité, flambement des colonnes, conception de poutre-colonne

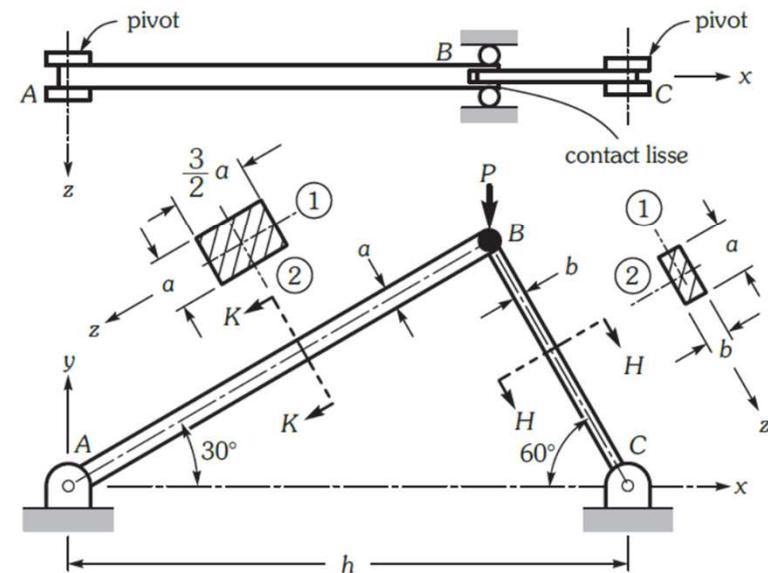
Problème 11.5

Une structure est composée de deux membrures, AB et BC , de section rectangulaire ($AB : a \times 3a/2$; $BC : a \times b$). Les membrures sont fabriquées du même matériau et tous les joints sont des pivots.

Déterminer la valeur de b en fonction de a pour que la structure soit optimale du point de vue de la résistance au flambement, c'est-à-dire que les deux membrures doivent flamber simultanément lorsqu'on applique une charge critique P_c .

Réponses :

$$b = 0,953a$$



Instabilité, flambement des colonnes, conception de poutre-colonne

Problème 11.6

Une ferme doit supporter une charge P de 90 kN. Les membrures en acier (module d'élasticité E de 200 GPa ; contrainte d'écoulement S_Y de 290 MPa) sont de section circulaire et reliées entre elles par des rotules. En supposant que les joints ne peuvent pas se déplacer latéralement, calculer les diamètres minimaux des membrures AB , BC et AC . Donner les valeurs théoriques et les valeurs imposées par les normes ACNOR avec $n = 1,34$ et un facteur de charge de 1,5.

Réponses :

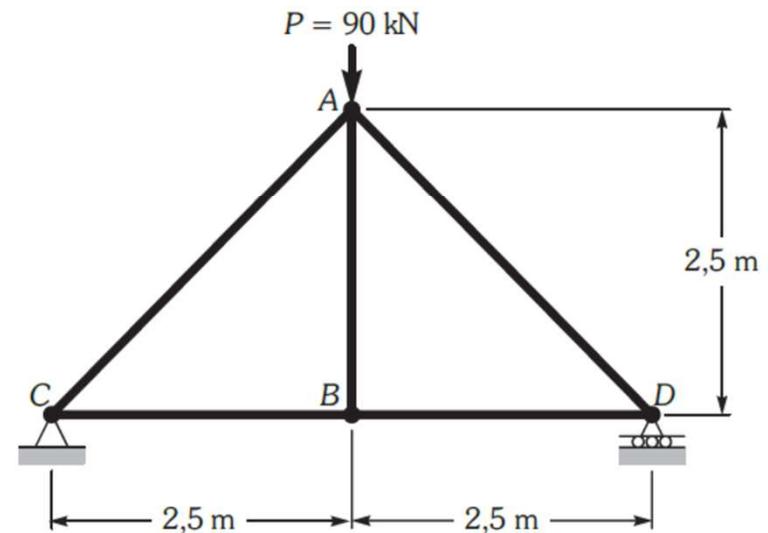
Valeurs théoriques :

$$d_{BC} = d_{BD} \geq 14,1 \text{ mm}; d_{AC} = d_{AD} \geq 53,4 \text{ mm}.$$

La membrure AB n'est pas requise théoriquement.

Valeurs prescrites par le code :

$$d_{BC} = d_{BD} \geq 18,1 \text{ mm}; d_{AC} = d_{AD} \geq 61,6 \text{ mm}.$$



Instabilité, flambement des colonnes, conception de poutre-colonne

Problème 11.7

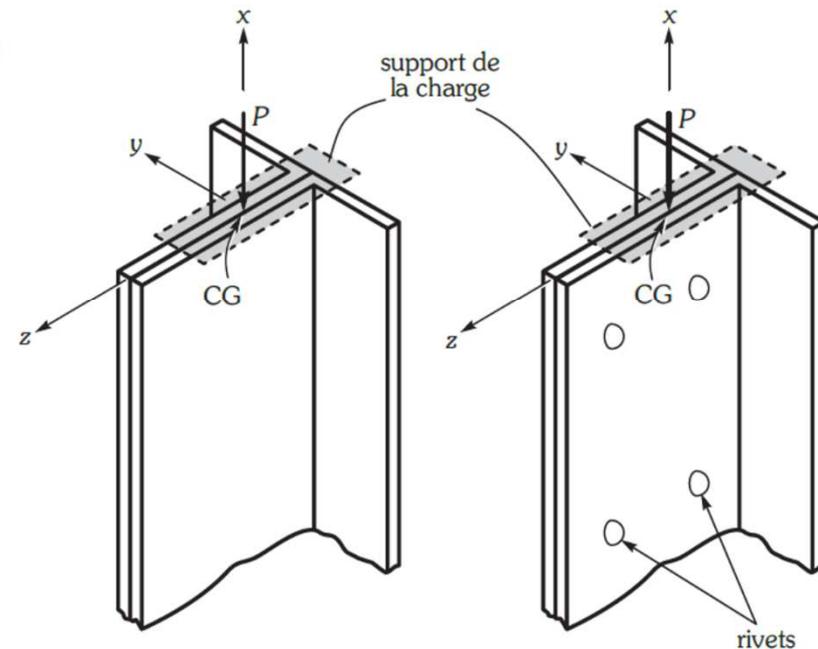
Un support de 1,4 m de longueur est composé de deux profilés $L102 \times 76 \times 9,5$ mm (app. C). Le matériau a un module d'élasticité E de 210 GPa et une contrainte d'écoulement S_Y de 250 MPa.

Examiner la capacité de résistance du support, dont une extrémité est encastree et l'autre est libre, pour les deux situations suivantes (fig. a et b) :

- les deux profilés ne sont pas assemblés, c'est-à-dire que chaque profilé agit de façon indépendante ;
- les deux profilés sont rivetés ensemble.

Réponses :

a) $P_{\max} = 229$ kN b) $P_{\max} = 756,6$ kN



Instabilité, flambement des colonnes, conception de poutre-colonne

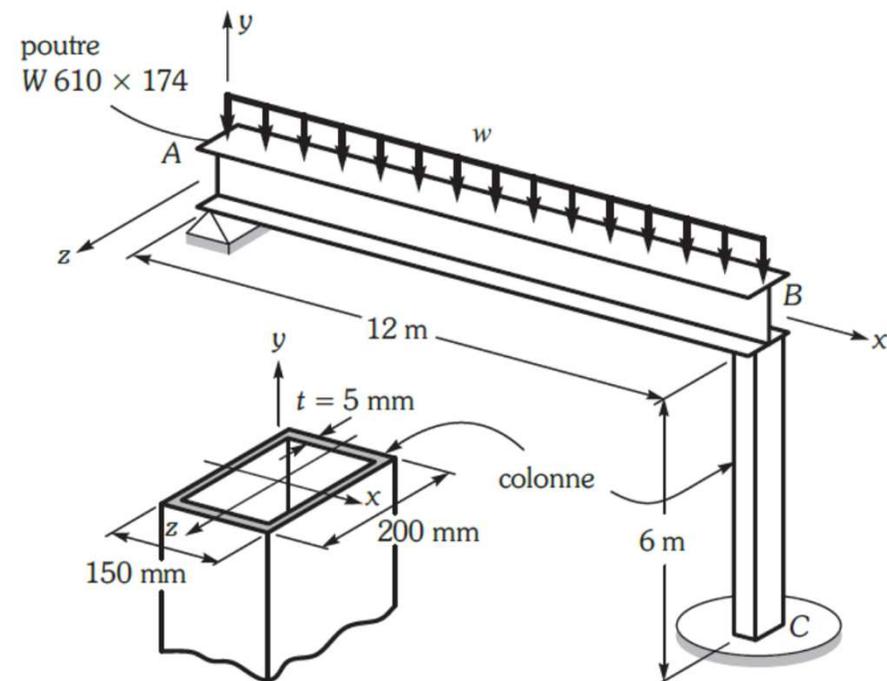
Problème 11.8

Soit une poutre AB dont le profilé est $W610 \times 174$ mm (app. C). Son extrémité A repose sur un appui simple et son extrémité B est supportée par une colonne de section rectangulaire à paroi mince dont l'épaisseur est uniforme. Toutes les composantes sont en acier ayant un module d'élasticité E de 200 GPa et une contrainte d'écoulement S_Y de 260 MPa.

Si le joint en B équivaut à une rotule, calculer la charge maximale w que pourra supporter le système en considérant un facteur de sécurité de 2 contre l'écoulement ou le flambement.

Réponses :

$$w_{\max} = 22,83 \text{ kN/m}$$



MÉTHODES D'ANALYSE BASÉES SUR L'ÉNERGIE DE DÉFORMATION (MÉTHODES ÉNERGÉTIQUES)

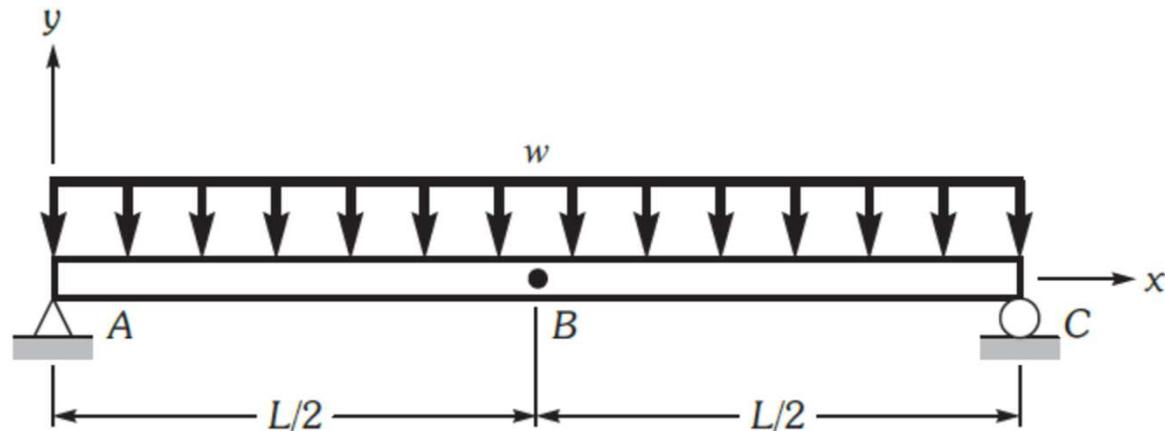
Méthodes d'analyse basées sur l'énergie de déformation (méthodes énergétiques)

Problème 14.1

Une poutre de longueur L est simplement supportée à ses deux extrémités et soumise à une charge w uniformément distribuée. Calculer le déplacement vertical de la section en B et l'angle de rotation de la section en A , en fonction des paramètres suivants : module d'élasticité E , second moment de section I par rapport à z et longueur L .

Réponses :

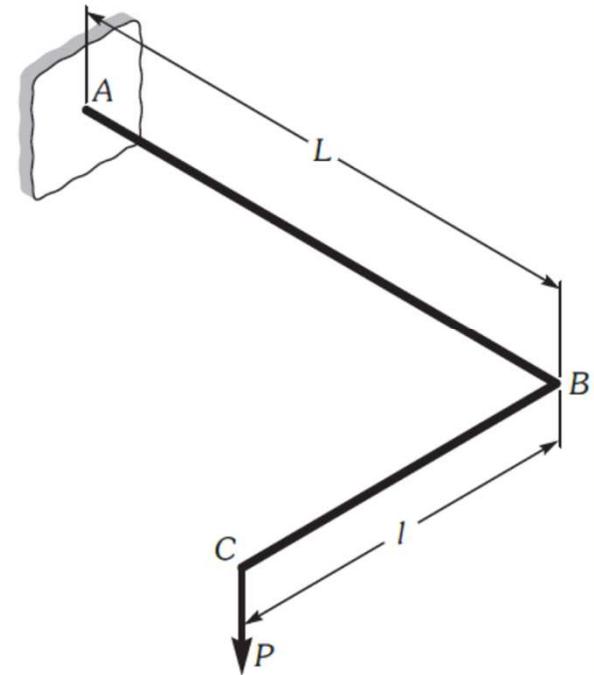
$$v_B = \frac{5wL^4}{384EI}; \theta_A = \frac{wL^3}{24EI}.$$



Méthodes d'analyse basées sur l'énergie de déformation (méthodes énergétiques)

Problème 14.2

Le système illustré est composé de deux membrures ayant les mêmes propriétés : module d'élasticité E , module de cisaillement G , second moment de section I par rapport à un diamètre et second moment polaire J . Le joint B est rigide. Déterminer le déplacement vertical de l'extrémité C de cette structure, en fonction de la charge verticale P et des autres caractéristiques du système.



Réponses :

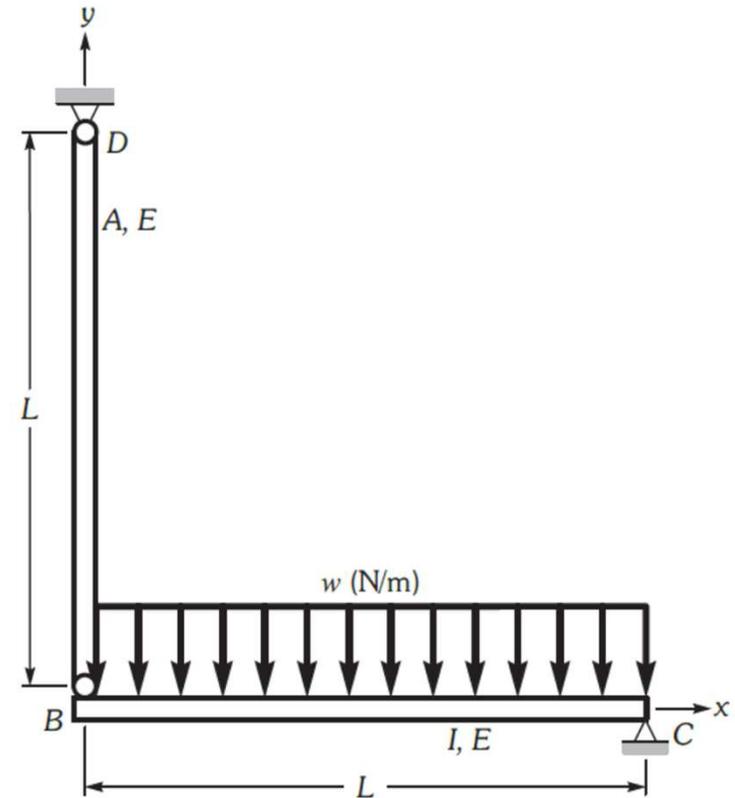
$$\delta_C = \frac{P(L^3 + l^3)}{3EI} + \frac{Pl^2}{GJ}$$

Méthodes d'analyse basées sur l'énergie de déformation (méthodes énergétiques)

Problème 14.3

La poutre BC (second moment de section I par rapport à z , module d'élasticité E) de longueur L est simplement supportée en C et retenue en B par un barreau BD (section A , module d'élasticité E). Les joints D et B sont des rotules. On soumet la poutre à une charge w uniformément distribuée.

Calculer, en fonction des paramètres w , A , I , E et L , le déplacement vertical de la section B et l'angle de rotation de la section C de la poutre.



Réponses :

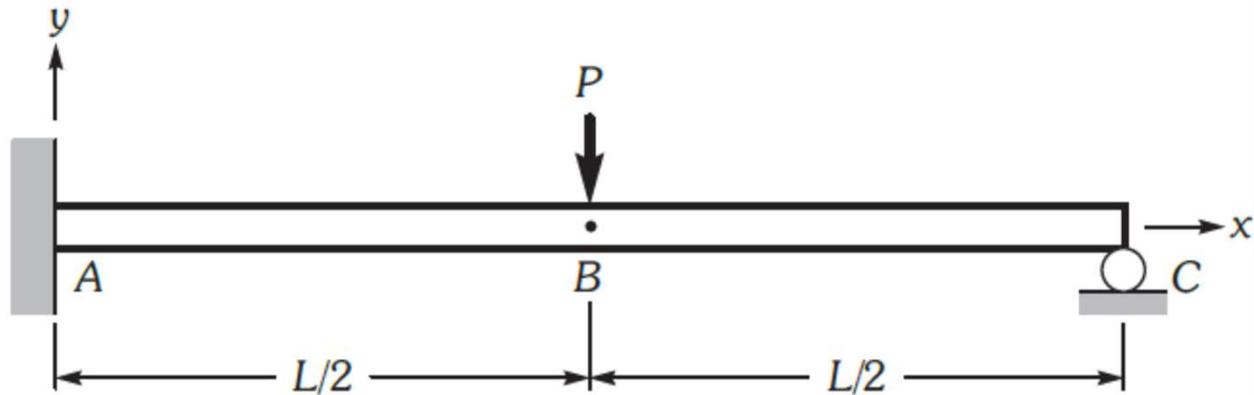
$$\delta_B = \frac{wL^2}{2AE}; \theta_C = \frac{wL^3}{24EI} + \frac{wL}{2AE} \text{ (sens antihoraire).}$$

Méthodes d'analyse basées sur l'énergie de déformation (méthodes énergétiques)

Problème 14.4

Une poutre ABC (module d'élasticité E , second moment de section I par rapport à z), encadrée en A et simplement supportée en C , est chargée au centre d'une force concentrée P . Calculer :

- les réactions aux appuis A et C ;
- la pente de la courbe élastique à la section en B .



Réponses :

a) $R_C = \frac{5P}{16}$; $R_A = \frac{11P}{16}$; $M_A = \frac{3PL}{16}$ (sens antihoraire).

b) $\theta_B = \frac{PL^2}{128EI}$ (sens horaire)

Méthodes d'analyse basées sur l'énergie de déformation (méthodes énergétiques)

Problème 14.5

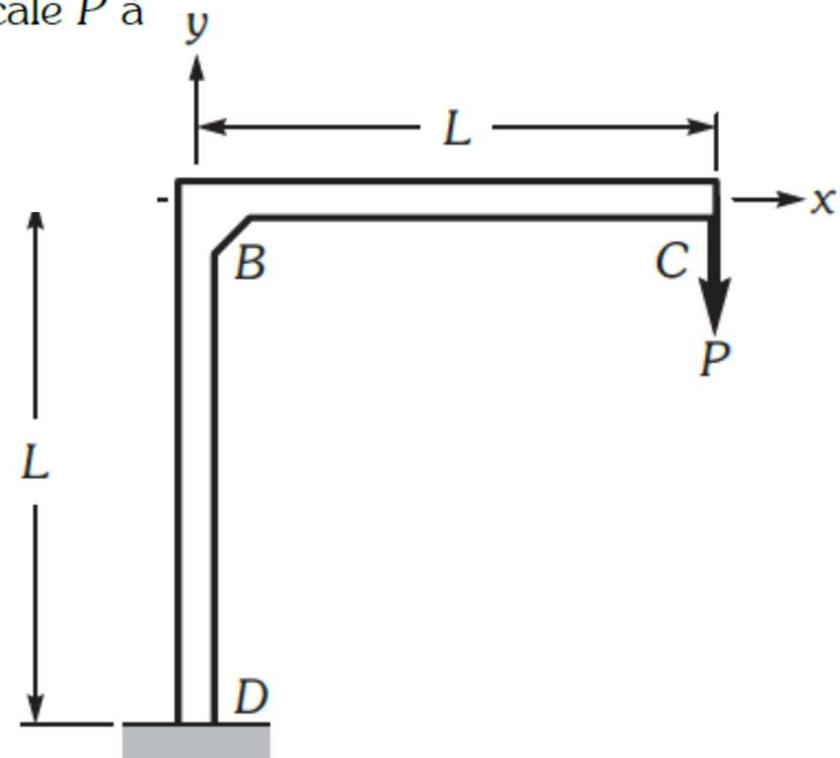
La structure illustrée est composée de deux membrures identiques DB et BC (section droite A , module d'élasticité E), reliées entre elles en B par un joint rigide. L'extrémité D est encasturée. La section des membrures a un second moment I par rapport à z . Si on applique une charge verticale P à l'extrémité C , calculer :

- l'angle de rotation de la section en C ;
- le déplacement vertical de l'extrémité C .

Réponses :

$$\text{a) } \theta_C = \frac{3PL^2}{2EI} \text{ (sens horaire)}$$

$$\text{b) } \delta_C = \frac{PL^3 \left(\frac{4}{3} + \frac{I}{AL^2} \right)}{EI} \text{ (vers le bas)}$$



Méthodes d'analyse basées sur l'énergie de déformation (méthodes énergétiques)

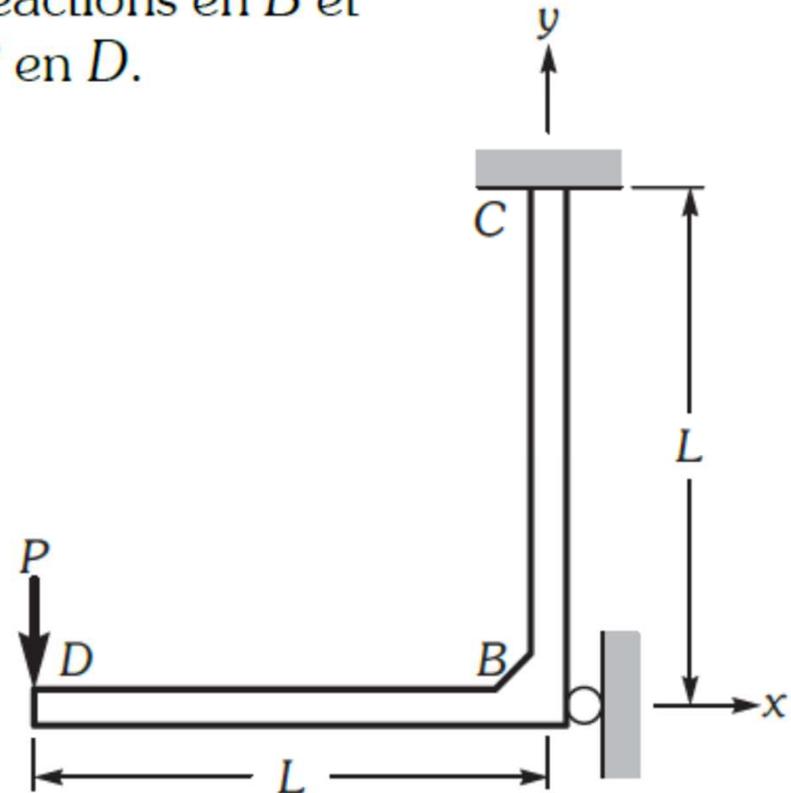
Problème 14.6

Deux membrures identiques BC et BD sont reliées solidement entre elles en B . L'extrémité C est encastree et l'ensemble prend appui en B . Déterminer les réactions en B et en C si on applique une charge verticale P en D .

Réponses :

$$R_{Bx} = \frac{3P}{2} \text{ (vers la gauche)}; R_{Cx} = \frac{3P}{2} \text{ (vers la droite)};$$

$$R_{Cy} = P \text{ (vers le haut)}; M_C = \frac{PL}{2} \text{ (sens antihoraire)}.$$



Méthodes d'analyse basées sur l'énergie de déformation (méthodes énergétiques)

Problème 14.8

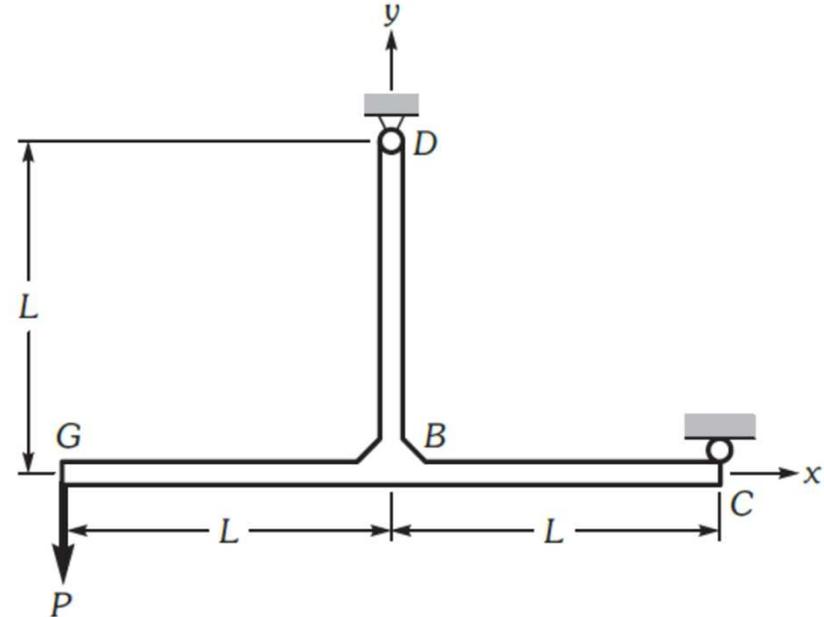
La structure illustrée est retenue par une rotule en D et par un appui simple en C . Le joint B est rigide. Les membrures, qui sont fabriquées du même matériau ayant un module d'élasticité E , ont les mêmes caractéristiques : section A , second moment de surface I par rapport à z et longueur L . Si on applique une charge verticale P à l'extrémité G , trouver, en fonction des caractéristiques de la structure :

- le déplacement horizontal de la section en G ;
- l'angle de rotation du joint B .

Réponses :

$$\text{a) } u_G = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{2PL}{AE} \text{ (vers la droite)}$$

$$\text{b) } \theta_B = \frac{PL^2}{3EI} + \frac{2P}{AE} \text{ (sens antihoraire)}$$



Méthodes d'analyse basées sur l'énergie de déformation (méthodes énergétiques)

Problème 14.9

Le système illustré est composé d'un élément continu GBC et d'une tige BD . L'extrémité C est encastree et les joints aux extrémités B et D sont des rotules. Toutes les membrures, fabriquées du même matériau ayant un module d'élasticité E , ont les mêmes caractéristiques : A (section), I (second moment de surface par rapport à z) et L (longueur).

Calculer, en fonction des caractéristiques du système :

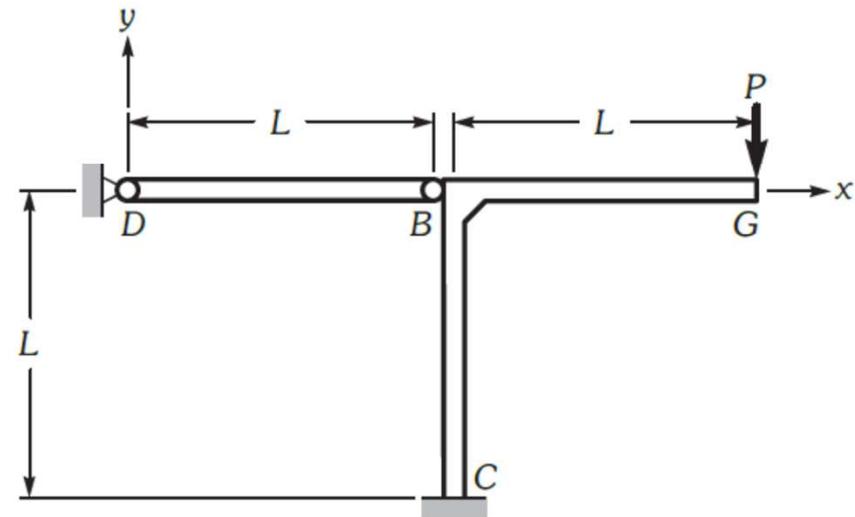
- la réaction en D ;
- l'angle de rotation du joint B de CBG .

Réponses :

$$\text{Posons } \alpha = \frac{I}{AL^2}.$$

$$\text{a) } R_D = \frac{3P}{2(1 + 3\alpha)} \text{ (vers la gauche)}$$

$$\text{b) } \theta_B = \frac{PL^2}{EI} \left[1 - \frac{3}{4(1 + 3\alpha)} \right] \text{ (sens horaire)}$$



Méthodes d'analyse basées sur l'énergie de déformation (méthodes énergétiques)

Problème 14.10

La structure illustrée est supportée par une rotule en H et par un appui simple en B . Le joint C est rigide. Le matériau utilisé a un module d'élasticité E , et les membrures ont toutes la même section A et le même second moment de surface I par rapport à z .

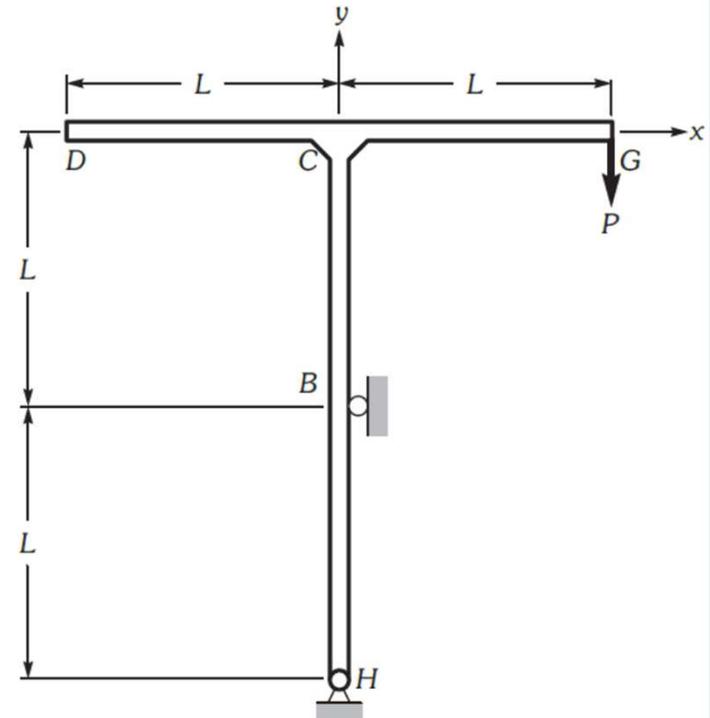
Si on applique une force verticale P en G , calculer, en fonction des caractéristiques de la structure :

- le déplacement horizontal de l'extrémité G ;
- l'angle de rotation de la section en G .

Réponses :

a) $u_G = \frac{5PL^3}{6EI}$ (vers la droite)

b) $\theta_G = \frac{11PL^2}{6EI}$ (sens horaire)



Méthodes d'analyse basées sur l'énergie de déformation (méthodes énergétiques)

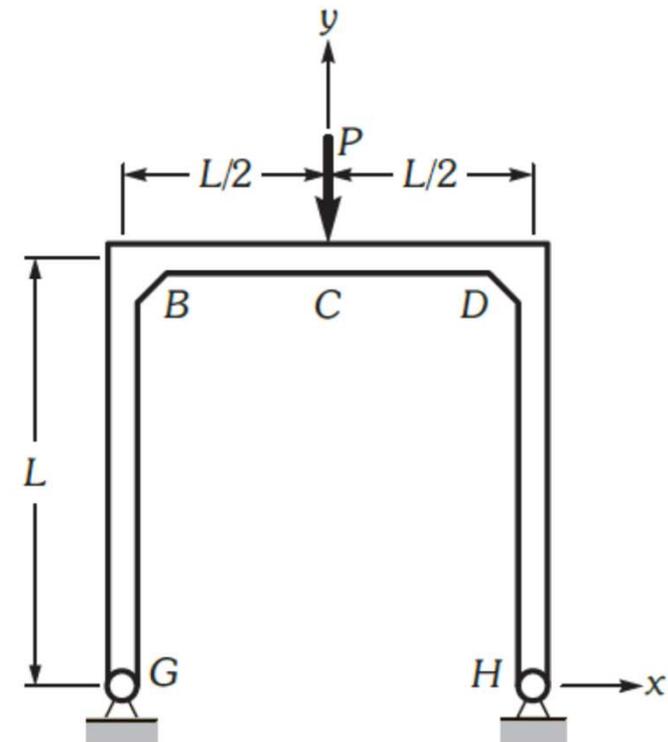
Problème 14.11

Le cadre illustré est composé de trois membrures identiques. Les joints B et D sont rigides, et les extrémités G et H sont supportées par des rotules. Les membrures ont une section A et un second moment de surface I par rapport à z , et le matériau a un module d'élasticité E .

Si on applique une charge P en C , calculer les réactions à l'appui G en fonction des caractéristiques du système.

Réponses :

$$R_y = \frac{P}{2} ; R_x = P \left(\frac{3}{40 + 24 \frac{I}{AL^2}} \right)$$



Méthodes d'analyse basées sur l'énergie de déformation (méthodes énergétiques)

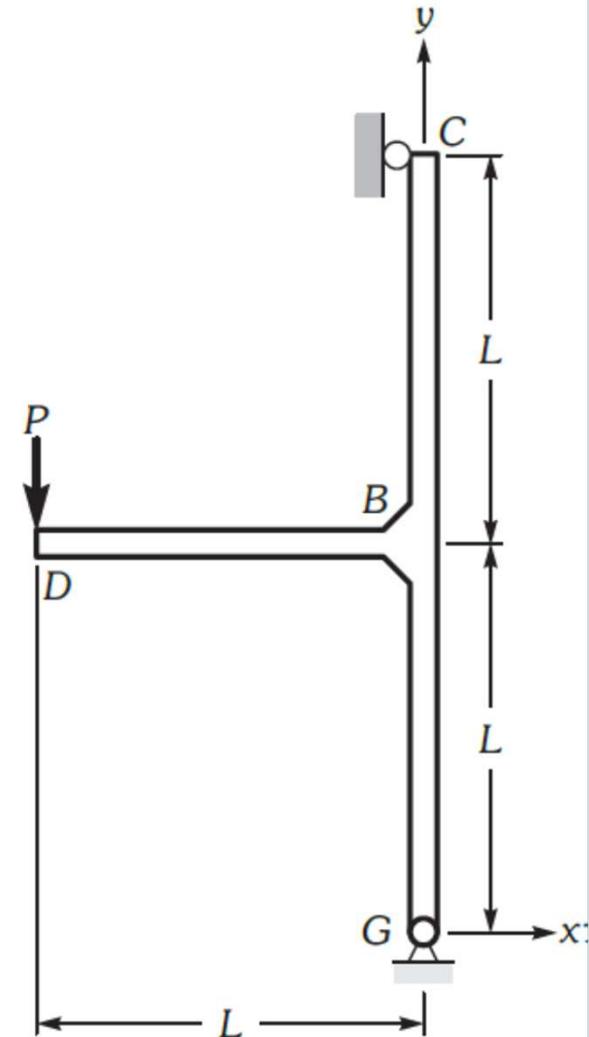
Problème 14.12

Toutes les membrures de la structure illustrée sont identiques : section A , second moment de surface I par rapport à z , longueur L et module d'élasticité E . Le joint B est rigide; l'extrémité G est retenue par une rotule et l'extrémité C est simplement supportée.

Si on applique une charge P en D , calculer le déplacement vertical de l'extrémité D de la structure.

Réponses :

$$v_D = \frac{PL^3}{2EI} + \frac{PL}{AE}$$



CONCEPTS D'ANALYSE LIMITE ET CONTRAINTES RÉSIDUELLES

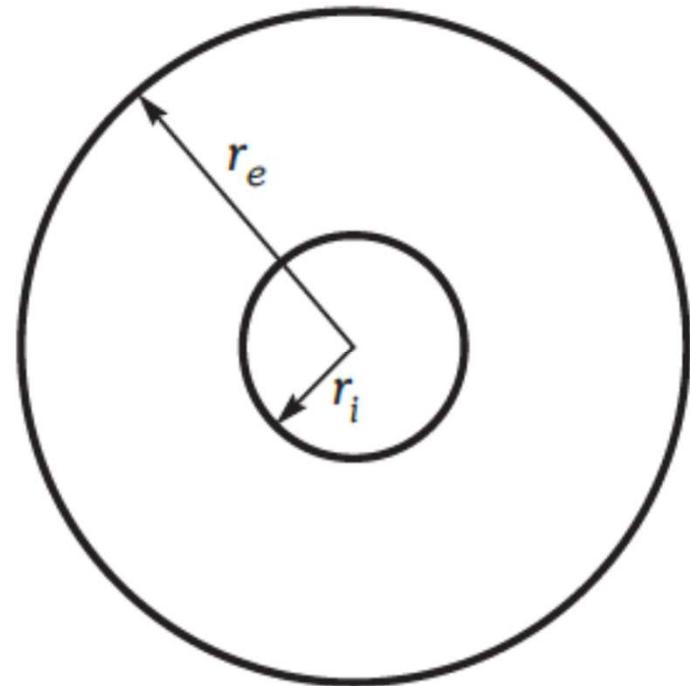
Concepts d'analyse limite et contraintes résiduelles

Problème 12.1

Un cylindre évidé ayant un rayon extérieur r_e et un rayon intérieur r_i est soumis à un couple de torsion. Établir le rapport $K = T_L/T_Y$, où T_L est le couple correspondant à l'écoulement complet du cylindre et T_Y , le couple correspondant au début de l'écoulement.

Réponses :

$$\text{Avec } \alpha = \frac{r_i}{r_e}, \quad K = \frac{4(1 + \alpha + \alpha^2)}{3(1 + \alpha)(1 + \alpha^2)}.$$



Concepts d'analyse limite et contraintes résiduelles

Problème 12.2

On soumet à un moment de flexion une poutre de section circulaire pleine ayant un rayon r .

Établir le rapport $K = M_L/M_Y$ entre le moment M_L correspondant à l'écoulement complet (moment limite) et le moment M_Y correspondant au début de l'écoulement de la poutre.

Réponses :

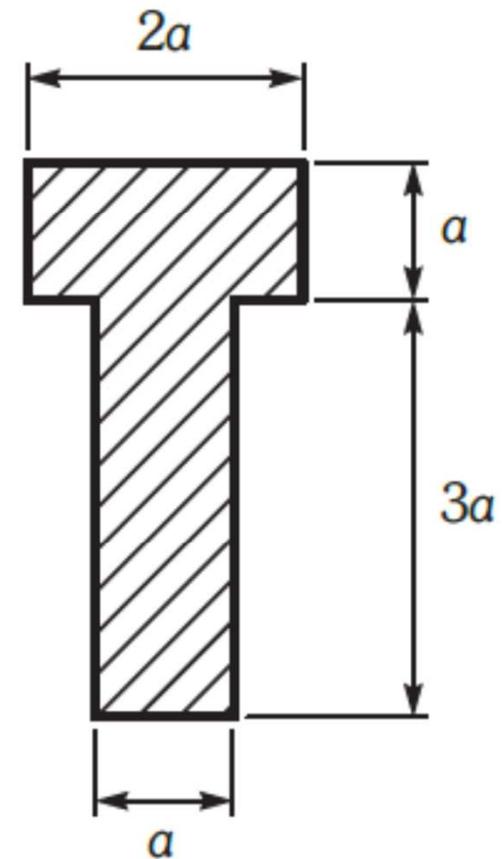
$$K = \frac{16}{3\pi}$$

Concepts d'analyse limite et contraintes résiduelles

Problème 12.3

On applique un moment de flexion à une poutre ayant la section en T illustrée.

Établir le rapport $K = M_L/M_Y$ entre les moments M_L et M_Y correspondant respectivement à l'écoulement complet et au début de l'écoulement de la poutre.



Réponses :

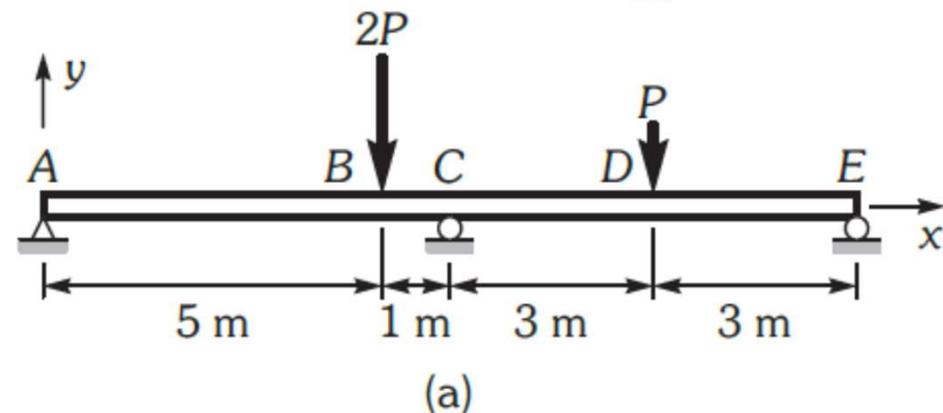
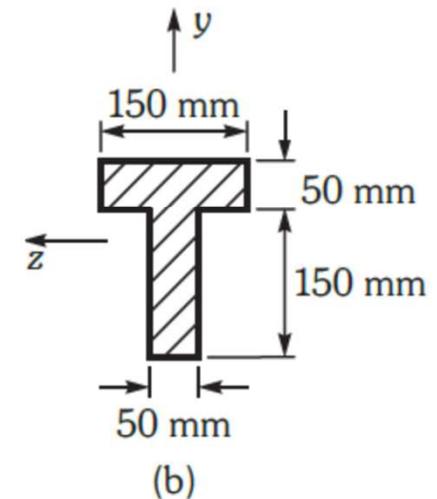
$$K = 1,673$$

Concepts d'analyse limite et contraintes résiduelles

Problème 12.4

La figure (a) montre une poutre continue qui a des appuis en A , en C et en E et qui doit supporter deux charges concentrées $2P$ et P . La figure (b) illustre la section droite en T de cette poutre.

Calculer la valeur de P correspondant à l'effondrement de la poutre si la limite d'écoulement S_Y du matériau est de 240 MPa.



Réponses :

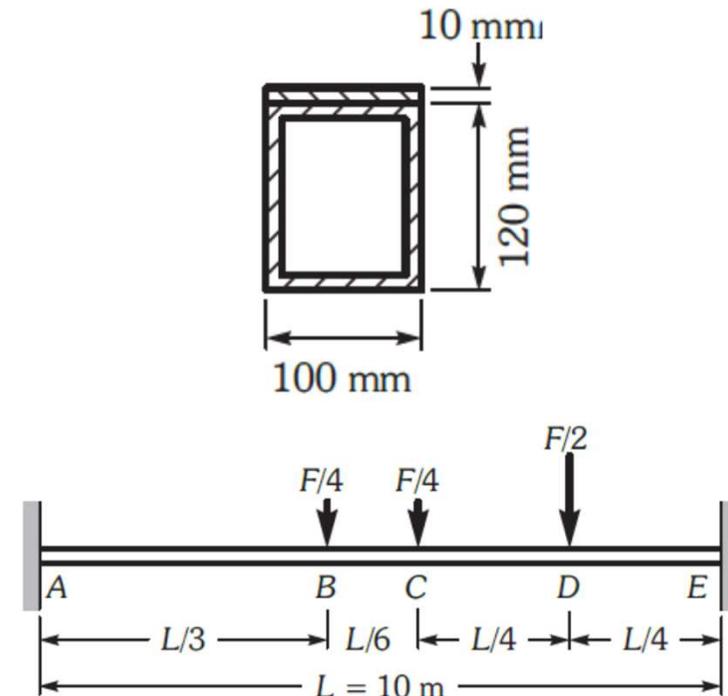
$$P_L = 180 \text{ kN}$$

Concepts d'analyse limite et contraintes résiduelles

Problème 12.8

La poutre $ABCDE$ supporte trois charges concentrées en B , en C et en D ; ces charges sont exprimées en fonction d'une force F . Le matériau utilisé a une contrainte d'écoulement S_Y de 400 MPa. On désigne par F_L la valeur de F qui correspond au début de l'effondrement de la poutre.

- Déterminer, en fonction de la longueur L et du moment limite M_L , la valeur de la force F_L .
- Tracer le diagramme des moments fléchissants lorsque $F = F_L$.
- La section de la poutre est un rectangle évidé de 100 mm \times 120 mm de dimensions extérieures et de 10 mm d'épaisseur uniforme. Elle a été renforcée par une plaque de section de 100 mm \times 10 mm. En tenant compte de ces caractéristiques, calculer la valeur de F_L .



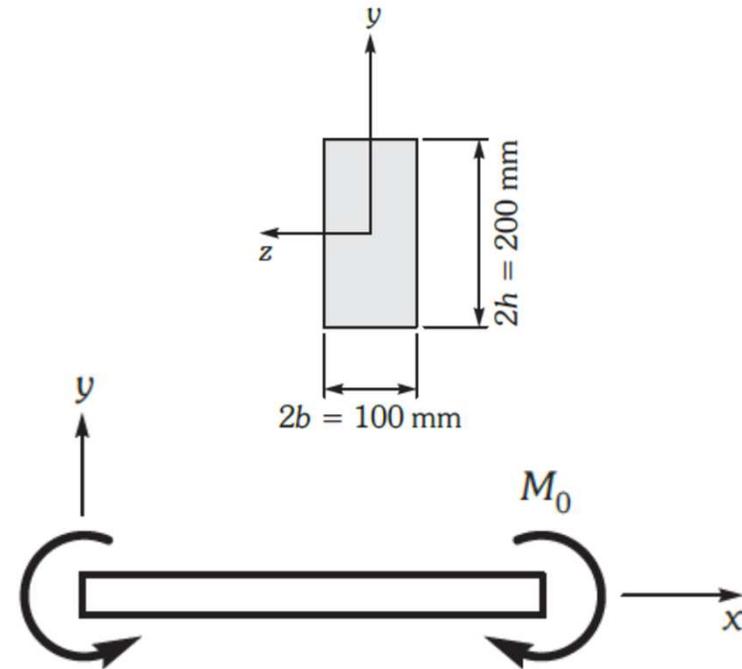
- Réponses :**
- $F_L = 12 \frac{M_L}{L}$
 - $M_A = -M_L$; $M_B = \frac{2M_L}{3}$; $M_C = M_L$; $M_D = \frac{3M_L}{4}$; $M_E = -M_L$.
 - $F_L = 102,0 \text{ kN}$

Concepts d'analyse limite et contraintes résiduelles

Problème 12.9

Une poutre, dont la direction longitudinale est orientée dans le sens de l'axe des x , est soumise à un moment de flexion pure M_0 dans la direction de l'axe des z . Sa section droite est rectangulaire : base $2b = 100$ mm ; hauteur $2h = 200$ mm. La limite d'écoulement S_Y du matériau, qu'on suppose élastique-parfaitement plastique, est de 200 MPa. Lorsque $M_0 = 175$ kN·m :

- établir la répartition des contraintes résiduelles, si le moment appliqué est ensuite enlevé ;
- calculer la valeur extrême du moment M_S , dans le sens inverse du moment de départ M_0 , qu'on peut appliquer sans atteindre la limite d'écoulement du matériau.



Soit y en millimètres, l'ordonnée des fibres par rapport à l'axe neutre, et σ_x , la contrainte normale en mégapascals.

Réponses :

- $\sigma_x = 0,643y$ pour $0 \leq y \leq 61,2$;
 $\sigma_x = 200 - 2,625y$ pour $61,2 < y \leq 100$.
- $M_S = 266,67$ kN·m