DÉPARTEMENT DE GÉNIE CHIMIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MODÉLISATION NUMÉRIQUE EN GÉNIE CHIMIQUE (GCH2535)

Théorie des E.D.P : contrôle périodique 1

07 février 2018

Directives : *Vous avez deux heures pour compléter ce contrôle. La documentation permise est une feuille manuscrite* $8.5'' \times 11''$ *(recto verso) préparée par l'étudiant.* **Une réponse sans justifications se verra attribuer la note 0**.

1. Questions rapides

Les questions a, b et c sont indépendantes

$\left(\frac{1}{20}\right)$ (a) Déterminer la plus petite période de la fonction

$$f(x) = \pi - \cos\left(\frac{2x}{3}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

Justifier votre réponse

$\left(\frac{1}{20}\right)$ (b) On considère la fonction définie par :

$$f(x) = 1+x, \quad \text{pour} \quad -1 < x < 0, \quad f(-1) = f(0) = 0{,}5 \quad \text{et} \quad f(x+1) = f(x).$$

Calculer $f(25)$. **Justifier votre réponse**

$\left(\frac{1{,}5}{20}\right)$ (c) On considère une fonction périodique de période $p = 4$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} x+2 & -2 \leq x < 0; \\ 2-2x, & 0 \leq x < 2. \end{cases}$$

Trouver la valeur vers laquelle la série de Fourier de la fonction $g(x)$ converge pour $x = -102$

2. Soit la fonction $h(x)$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad 0 \leq x < 1 \\ -1+x & \text{pour} \quad 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

$\left(\frac{2}{20}\right)$ (a) On définit par prolongement la fonction impaire périodique de période $p = 4$ qui coïncide avec la fonction $h(x)$ sur l'intervalle [0,2].
Tracer sur l'intervalle $[-6{,}6]$ le graphe de la fonction vers laquelle la série de Fourier du prolongement impair de la fonction $h(x)$ converge.

$\left(\frac{1{,}5}{20}\right)$ (b) On définit par prolongement la fonction paire périodique de période $p = 4$ qui coïncide avec la fonction $h(x)$ sur l'intervalle [0,2].
Tracer sur l'intervalle $[-6{,}6]$ le graphe de la fonction vers laquelle la série de Fourier du prolongement pair de la fonction $h(x)$ converge.

$\left(\frac{3}{20}\right)$ **3.** Soit la fonction $v(x,t)$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \sin(n\pi t) + D_n \cos(n\pi t)\right] \sin(n\pi x)$$

On suppose que $v(x,t)$ vérifie les conditions initiales suivantes

$$v(x,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad 0 \le x < \frac{1}{4} \\ 2 & \text{pour} \quad \frac{1}{4} \le x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{pour} \quad \frac{3}{4} \le x < 1. \end{cases}$$

Déterminer les constantes C_n et D_n pour $n = 1,2,3,\ldots$.

$\left(\frac{4}{20}\right)$ **4.** Trouver les fonctions et les valeurs propres réelles du problème

$$\begin{cases} y'' + (1-\lambda)y = 0 & \text{pour} \quad -1 < x < 1, \\ y(-1) - y(1) = 0 & \text{et} \quad y'(-1) - y'(1) = 0. \end{cases}$$

On demande une solution complète où chaque étape est justifiée.

(+1) **Bonus** Quelle est la plus petite période **entière** (c'est-à-dire $p \in \mathbb{N}^* = \{1,2,3,\ldots\}$) commune aux fonctions propres obtenues?

5. On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial t}, & \text{pour} \quad 0 < x < 1 \quad \text{et } t > 0; \\ p(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad p(1,t) = 0 & \text{pour} \quad t > 0 \\ p(x,0) = 1 \quad \text{pour} \quad 0 < x < 1. \end{cases} \tag{1}$$

$\left(\frac{3}{20}\right)$ (a) Soit $p(x,t) = F(x)G(t)$, en utilisant la méthode de séparation des variables, montrer que la fonction $F(x)$ satisfait au problème de fonctions propres

$$F''(x) - 2F'(x) - 2\lambda F(x) = 0, \quad F(0) = 0 \quad \text{et} \quad F(1) = 0, \tag{2}$$

et la fonction $G(t)$ satisfait à l'équation différentielle

$$G'(t) - \lambda G(t) = 0,$$

où λ est une constante de séparation.

$\left(\frac{3}{20}\right)$ (b) En vous servant des résultats obtenus en (a) et des indications ci-dessous, trouver la solution du problème (1).

Note : Le problème de fonctions propres (2) a pour solutions

$$F_n(x) = c_n e^x \sin(n\pi x) \quad \text{et} \quad \lambda_n = -\left(\frac{n^2\pi^2 + 1}{2}\right),$$

où les c_n sont des constantes réelles pour $n = 1,2,3,\ldots$.

Indice : $\quad 1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^x \sin(n\pi x)$, où $\quad b_n = \dfrac{2n\pi\left[(-1)^{n+1}e^{-1} + 1\right]}{n^2\pi^2 + 1}, n = 1,2,3,\ldots$.

Les professeurs du cours GCH2535