POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

ELE 6705
Traitement numérique des signaux

Hassan Bensalah

Chap. VI : Traitement Numérique des Signaux Bidimensionnels

Sujets abordés

- Séquences et systèmes bidimensionnels
- Transformée en Z
- Analyse de Fourier

Séquences et systèmes bidimensionnels

- Une très grande similarité entre le traitement des signaux à 1-D et le traitement des signaux à 2-D dimension; les concepts de filtrage, T.Z, T.F, TDF et TRF utilisés en 1-D sont « étendus » en 2-D;

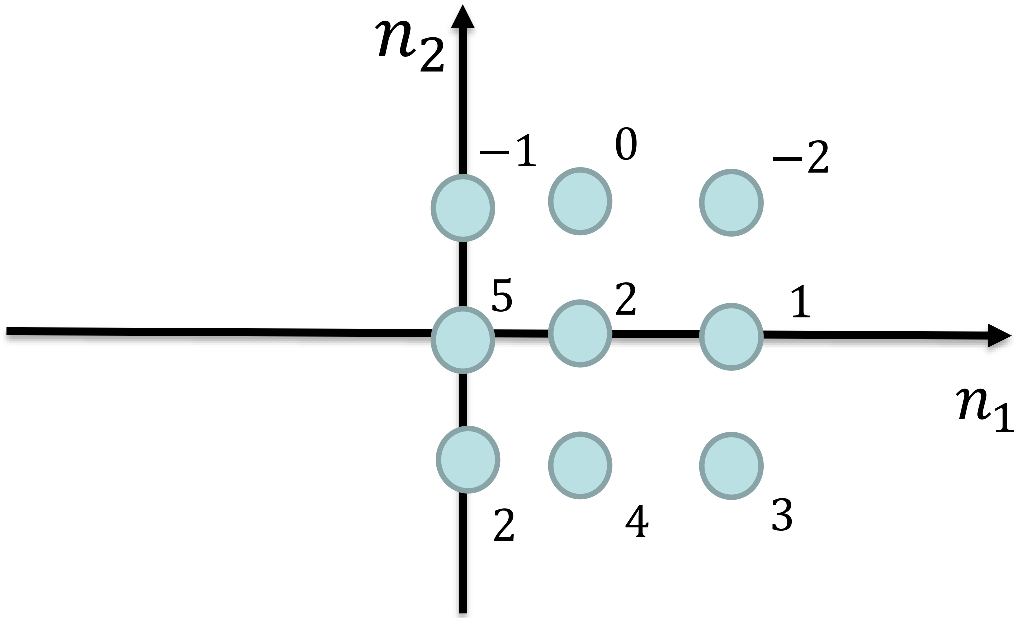
- Il y a également de grandes différences entres 1-D et 2-D: Quantité de données impliquée en 2-D est considérablement plus grande qu'en 1-D, d'où l'importance de l'efficacité du traitement;

- L'analyse mathématique est plus problématique en 2-D: La factorisation d'un polynôme pour la réalisation d'une structure en cascade n'est pas évidente en 2-D; une étude de la stabilité d'un système basée sur la position des pôles de FT n'est pas aussi simple qu'en 1-D

Séquence bidimensionnelles:

$x(n_1, n_2)$

colonne　　rangée



- Séquence usuelles

1. Impulsion 2-D

$$\delta(n_1, n_2) = \begin{cases} 1, n_1 = n_2 = 0 \\ 0, \quad\quad ailleurs \end{cases}$$

$$\delta(n_1) = \begin{cases} 1, & n_1 = 0 \\ 0, & ailleurs \end{cases} \quad \delta(n_1 - n_2) = \begin{cases} 1, & n_1 - n_2 = 0 \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

$$x(n_1, n_2) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} x(k_1, k_2)\, \delta(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$$

2. Échelon 2-D

$$1(n_1, n_2) = \begin{cases} 1, & n_1 \; et \; n_2 \geq 0 \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

$$1(n_1) = \begin{cases} 1, & n_1 \geq 0 \\ 0, & ailleurs \end{cases} \quad 1(n_1 - n_2) = \begin{cases} 1, & n_1 - n_2 \geq 0 \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

3. Séquence périodique

$$x(n_1, n_2) = x(n_1 - k_1 N_1, n_2 - k_2 N_2)$$

Avec k_1 et k_2 entiers Période est $N_1 N_2$

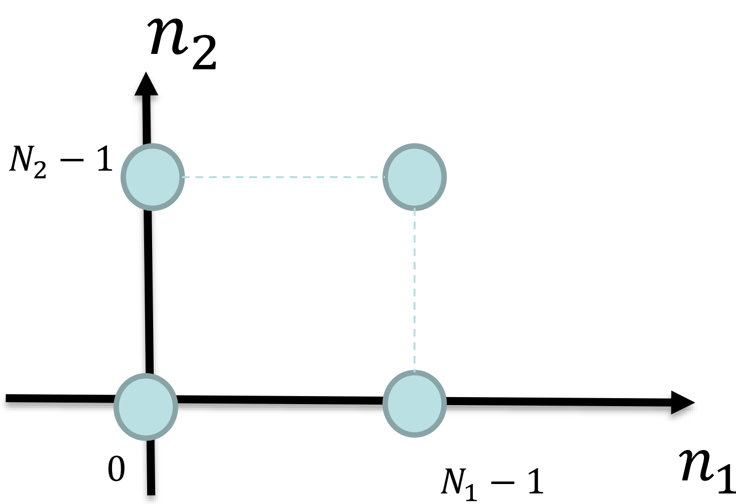
4. Séquence séparable

$$x(n_1, n_2) = x_1(n_1) x_2(n_2)$$

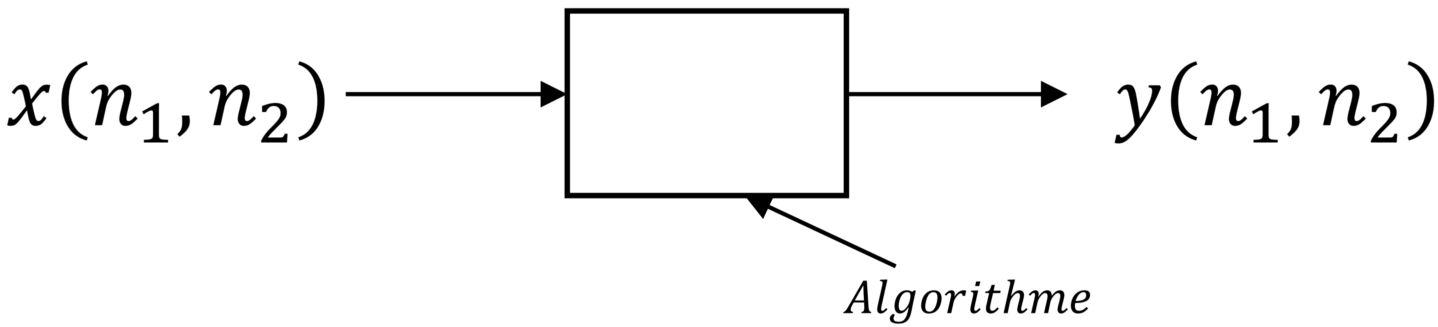
Remarque:

- ✓ $x(n_1, n_2)$ est une séquence finie
- ✓ $N_1 N_2$ degrés de liberté
- ✓ Si $x(n_1, n_2)$ est séparable:

  $N_1 + N_2$ degrés de liberté



Systèmes bidimensionnelles



Classe d'intérêt: Systèmes **Linéaires** et **Stationnaires**

Superposition

$$a x_1(n_1, n_2) + \mathrm{b} x_2(n_1, n_2)$$

$$\Downarrow$$

$$a y_1(n_1, n_2) + \mathrm{b} y_2(n_1, n_2)$$

Invariant par translation

$$x(n_1 - N_1, n_2 - N_2)$$

$$\Downarrow$$

$$y(n_1 - N_1, n_2 - N_2)$$

- Réponse impulsionnelle:

$h(n_1, n_2)$ est la sortie lorsque $x(n_1, n_2) = \delta(n_1, n_2)$

- Condition nécessaire et suffisante pour la stabilité:

$$\sum_{n_1} \sum_{n_2} |h(n_1, n_2)| < \infty$$

- Sortie en fonction de l'entrée:

$$x(n_1, n_2) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} x(k_1, k_2)\, \delta(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$$

$$y(n_1,n_2) = \sum_{k_1}\sum_{k_2} x(k_1,k_2)\,h(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$$

$$\boxed{= x(n_1,n_2) ** h(n_1 - k_1, n_2 - k_2)}$$

Convolution 2-D

- Cas particulier: Lorsque $x(n_1,n_2)$ et $h(n_1,n_2)$ sont séparables:

$$y(n_1,n_2) = \left[\sum_{k_1} x(n_1)\,h(n_1 - k_1)\right]\left[\sum_{k_2} x(n_2)\,h(n_2 - k_2)\right]$$

$$= [x_1(n_1) * h_1(n_1)]\,[x_2(n_2) * h_2(n_2 - k_2)]$$

$$y_1(n_1) \qquad\qquad y_2(n_2)$$

- Cas particulier: Une des séquences est séparable(Ex: $h(n_1, n_2)$)

$$y(n_1,n_2) = \sum_{k_1}\sum_{k_2} x(k_1,k_2)\, h_1(n_1 - k_1)h_2(n_2 - k_2)$$

$$= \sum_{k_1} h_1(n_1 - k_1) \underbrace{\sum_{k_2} x(k_1,k_2)h_2(n_2 - k_2)}_{v(k_1,n_2)}$$

Convolution 1-D de chaque colonne de $x(n_1, n_2)$ avec $h_2(n_1)$

Convolution 1-D de chaque rangée de $v(k_1, n_2)$ avec $h_1(n_2)$

➢ Remarque: Corrélation numérique 2-D

$$x(n_1, n_2) \, c \, y(n_1, n_2) = R_{xy}(n_1, n_2)$$

$$= \sum_{k_1} \sum_{k_2} x^*(k_1, k_2) \; y(n_1 + \; k_1, n_2 + \; k_2)$$

Soient, $m_1 = -k_1 \; et \;\; m_2 = -k_2$

$$R_{xy}(n_1, n_2) = \sum_{m_1} \sum_{m_2} x^*(-m_1, -m_2) \; y(n_1 - m_1, n_2 - m_2)$$

$$= x^* \; (-n_1, -n_2) * \; y(n_1, n_2)$$

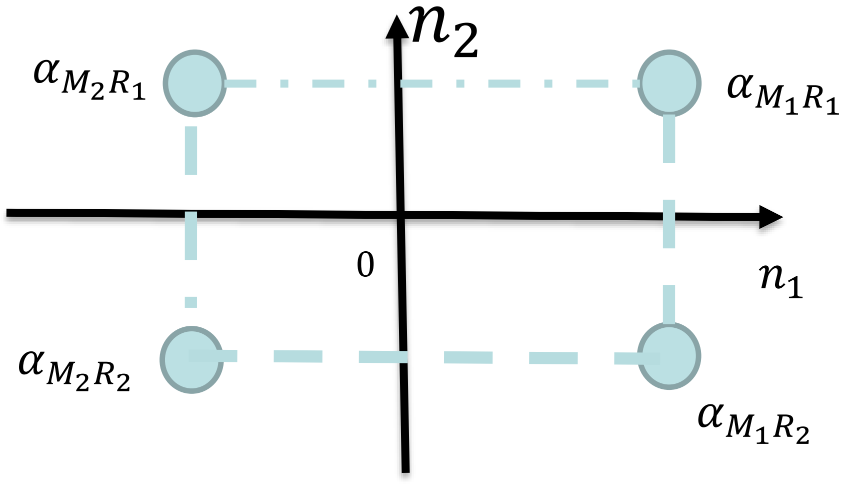
➢ Équation aux différences

Système non récursif, non causal

$$y(n_1,n_2)=\sum_{m=M_1}^{M_2}\sum_{r=R_1}^{R_2}\alpha_{mr}x(n_1-m,n_2-r)$$

$h(m,r)$

Masque d'entrée (en position pour l'évaluation de $y(0,0)$)

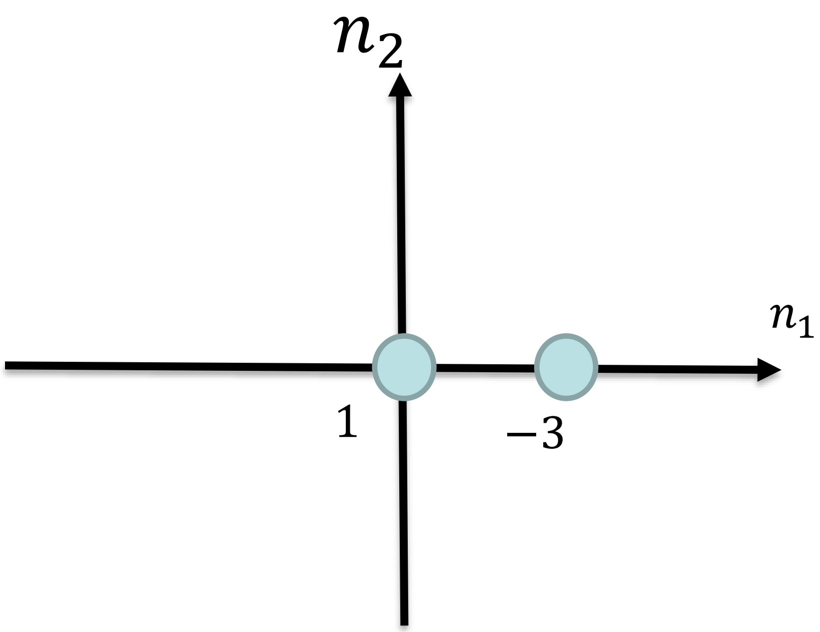


Système récursif, non causal réalisable

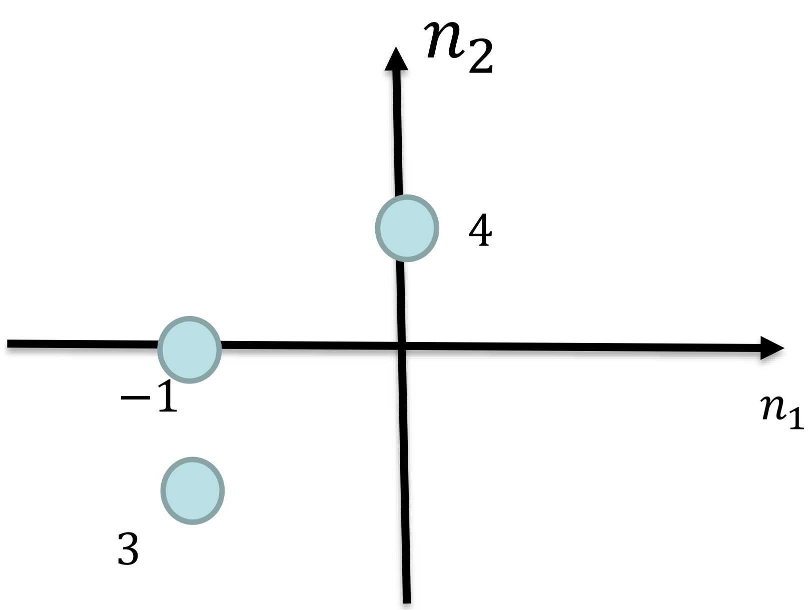
Exemple:

$$y(n_1,n_2)=x(n_1,n_2) - 3x(n_1+1,n_2) + 4y(n_1,n_2+1) - y(n_1-1,n_2) + 3y(n_1-1,n_2-1)$$

Masque d'entrée



Masque de sortie



Transformation en Z

$$TZ\{x(n_1,n_2)\} = X(z_1,z_2)$$

$$= \sum_{n_1}\sum_{n_2} x(n_1,n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2}$$

Où z_1 et z_2 sont des valeurs complèxes

✓ $X(z_1,z_2)$est représenté selon 4 dimension;

✓Les pôles seront des surfaces dans un espace à 4 dimensions

Principales propriétés

✓ Linéarité

✓Convolution

$$x(n_1, n_2) ** y(n_1, n_2) \longleftrightarrow X(z_1, z_2)\mathrm{Y}(z_1, z_2)$$

✓Séquence séparables

$$x(n_1, n_2) = x_1(n_1)x_2(n_2)$$

$$X(z_1, z_2) = \sum_{n_1}\sum_{n_2} x_1(n_1)x_2(n_2)\, z_1^{-n_1} z_2^{-n_2}$$

$$= X_1(z_1)X_2(z_2)$$

Analyse de Fourier

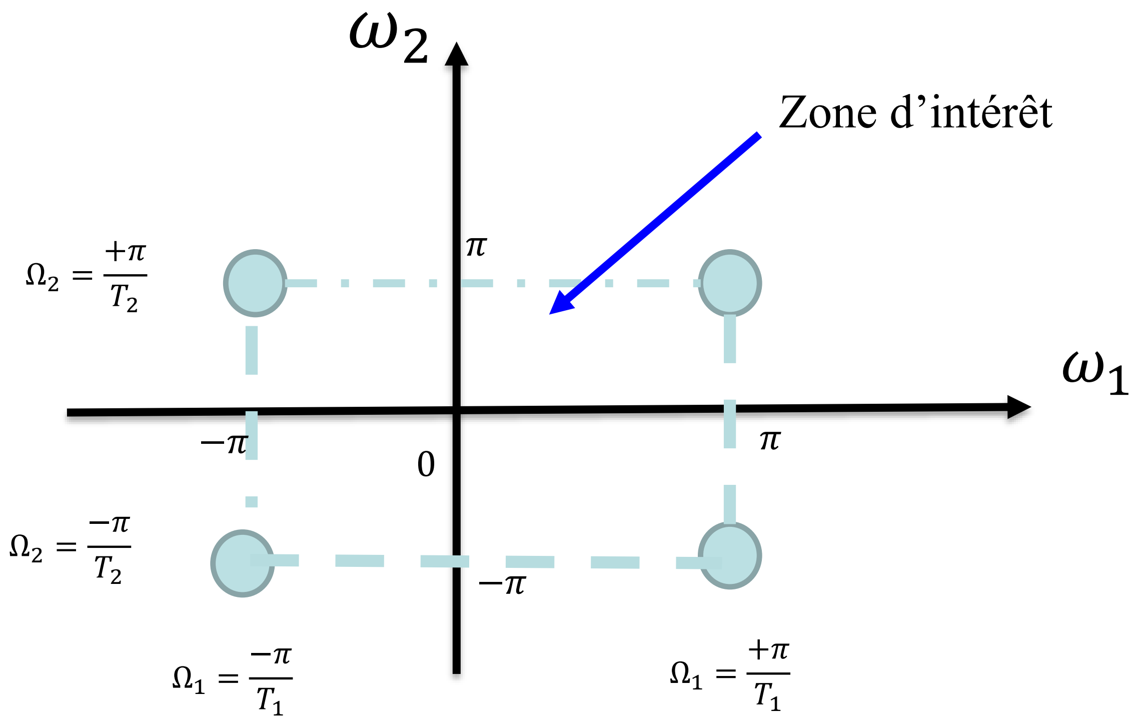
❖ transformée de Fourier d'une séquence

$$X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} x(n_1, n_2) e^{-j\omega_1} e^{-j\omega_2}$$

✓ Inverse

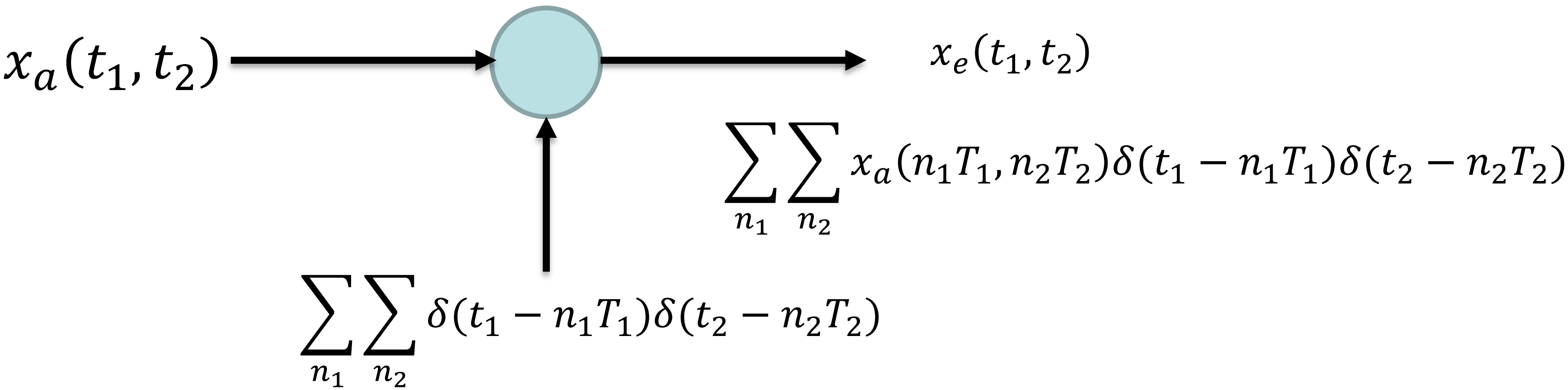
$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right) e^{-j\omega_1} e^{-j\omega_2} d\omega_2 \, d\omega_1$$

✓ $X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right)$ est périodique de période 2π



✓ T_1 et T_2 sont les intervalles d'échantillonnage

➢ Soit $x(n_1, n_2)$ obtenu par l'échantillonnage de $x_a(t_1, t_2)$



$$X_e(\Omega_1, \Omega_2) = \frac{1}{4\pi^2} X_a(\Omega_1, \Omega_2) * \frac{4\pi^2}{T_1T_2} \sum_{k_1}\sum_{k_2} \delta\left(\Omega_1 - \frac{2\pi k_1}{T_1}, \Omega_2 - \frac{2\pi k_2}{T_2}\right)$$

$$= \frac{1}{T_1T_2} \sum_{k_1}\sum_{k_2} X_a\left(\Omega_1 - \frac{2\pi k_1}{T_1}, \Omega_2 - \frac{2\pi k_2}{T_2}\right)$$

$$X_e(\Omega_1,\Omega_2) = \sum_{n_1}\sum_{n_2} x_a(n_1T_1,n_2T_2)e^{-j\Omega_1 n_1 T_1}e^{-j\Omega_2 n_2 T_2}$$

$$\boxed{x_a(n_1T_1,n_2T_2) = x(n_1,n_2)}$$

$$X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right) = X_e(\Omega_1,\Omega_2)\Big|_{\substack{\Omega_1 = \frac{\omega_1}{T_1} \\ \Omega_2 = \frac{\omega_2}{T_2}}}$$

$$X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right) = \frac{1}{T_1T_2}\sum_{k_1}\sum_{k_2} X_a\left(\frac{\omega_1 - 2\pi k_1}{T_1},\frac{\omega_2 - 2\pi k_2}{T_2}\right)$$

✓ Relation avec la transformation en Z

$$X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right) = X(z_1,z_2)\Big|_{\substack{z_1 = e^{j\omega_1},\, z_2 = e^{j\omega_2} \\ |z_1| = |z_2| = 1}}$$

✓ Séquence séparable $\boxed{x(n_1,n_2)=x_1(n_1)x_2(n_2)}$

$$X(z_1,z_2)=X(z_1)X(z_2) \qquad X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)=X_1\left(e^{j\omega_1}\right)X_2\left(e^{j\omega_2}\right)$$

Transformation Discrète De Fourier(TDF)

- ✓ $x(n_1, n_2)$ Non nul pour $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1 \; et \; 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$

$$X(k_1, k_2) = X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right)\Bigg|_{\substack{\omega_1 = \frac{2\pi k_1}{N_1} \\ \omega_2 = \frac{2\pi k_2}{N_2}}}$$

$$= \sum_{n_1} \sum_{n_2} x(n_1, n_2) e^{-j\frac{2\pi k_1}{N_1} n_1} e^{-j\frac{2\pi k_2}{N_2} n_2}, \begin{matrix} k_1 = 0,1 \cdots, N_1 - 1 \\ k_2 = 0,1 \cdots, N_2 - 1 \end{matrix}$$

- ✓ Inverse

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1} \sum_{k_2} X(k_1, k_2) e^{+j\frac{2\pi k_1}{N_1} n_1} e^{+j\frac{2\pi k_2}{N_2} n_2}, \begin{matrix} n_1 = 0,1 \cdots, N_1 - 1 \\ n_2 = 0,1 \cdots, N_2 - 1 \end{matrix}$$

Algorithme rapide pour l'évaluation de la (TDF)

$$X(k_1,k_2)=\underbrace{\sum_{n_1}\underbrace{\sum_{n_2} x(n_1,n_2)e^{-j\frac{2\pi k_1}{N_1}n_1}e^{-j\frac{2\pi k_2}{N_2}n_2}}_{v(n_1,k_2)\text{ résultat de la TDF effectuée sur chaque colonne de } x(n_1,n_2)}}_{\text{résultat de la TDF effectuée sur chaque rangée de } v(n_1,k_2)}$$

✓ Séquence séparable

$$X(k_1,k_2)=\underbrace{\sum_{n_1} x_1(n_1)e^{-j\frac{2\pi k_1}{N_1}n_1}}_{\text{TDF 1-D avec } N_1 \text{ points}}\underbrace{\sum_{n_2} x_2(n_2)e^{-j\frac{2\pi k_2}{N_2}n_2}}_{\text{TDF 1-D avec } N_2 \text{ points}}$$

Référence

*Theory and Application of Digital Signal P*rocessing
Chapitre 7
par:
Lawrence R. Rabiner and Bernard God