



POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

LE GÉNIE
EN PREMIÈRE CLASSE

ELE 6705

Traitement numérique des signaux

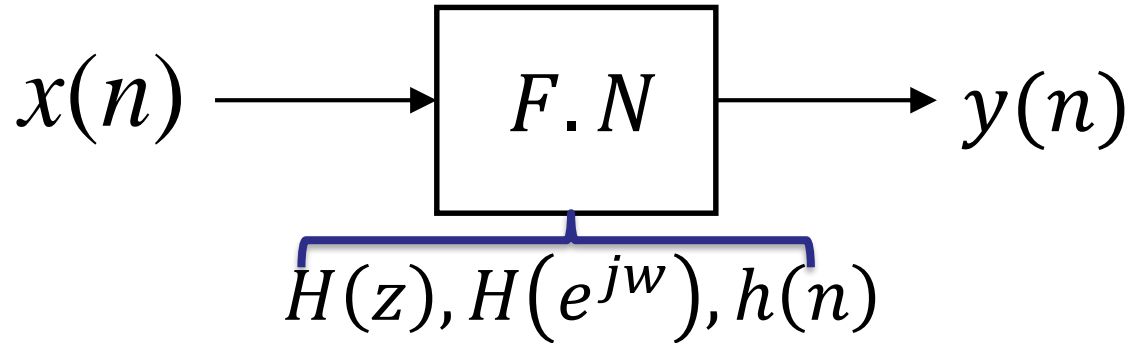
Hassan Bensalah

Chap. IV : Filtres Numériques

Sujets abordés

- Généralités
- Filtres RII: Invariance à l'impulsion
- Filtres RII: Évaluation Numérique de l'équation différentielle
- Filtres RII: Évaluation Numérique de l'intégration
- Filtres RII: Optimisation
- Filtres RIF: Méthode des fenêtres
- Filtres RIF: Approximation optimale
- Transformation en fréquence
- Effet de la précision finie dans la réalisation des filtres

Généralités



Avantages:

- programmables en changeant uniquement des variables et non pas le circuit;
- La simulation se fait de manière exacte sur l'ordinateur;
- Pas de dégradation avec le temps et la température;

➤ Inconvénients:

- Mais à ne pas utiliser à haute puissance;
- Infrastructure lourde: donne des circuits complexes même pour des filtres simples;
- Quantification, précision finie.

➤ Représentations des filtres numériques:

□ Fonction de transfert:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} a_k z^{-k}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

- N est l'ordre du filtre

$$H(z) = b_0 \frac{\prod_{i=1}^{N-1} (z - z_i)}{\prod_{i=1}^{N-1} (z - p_i)} = b_0 \frac{\prod_{i=1}^{N-1} (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N-1} (1 - p_i z^{-1})}$$

- z_i sont les zéros et p_i sont les pôles de $H(z)$

❖ La stabilité du filtre est déterminée par l'appartenance des pôles au cercle unité ($|p_i| < 1$)

❖ Le filtre à minimum de phase si les zéros appartenant au cercle unité ($|z_i| < 1$)

□ Réponse impulsionnelle:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

❖ La CNS de la stabilité du filtre est donnée par:

$$\sum_n |h(n)| < \infty$$


❖ $h(n)$ est la réponse impulsionnelle du filtre, sa *TDF*:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

□ Équation aux différences:

- ❖ Une transformation en z inverse de la fonction de transfert $H(z)$ nous donne:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N-1} a_k y(n-k)$$


Valeur courante et valeurs
précédentes de l'entrée $x(n)$

Valeurs précédentes de la
sortie $y(n)$

- ❖ b_k et a_k sont des coefficients réels et constants du filtre;
- ❖ Selon si les a_k sont non nuls ou nuls, on parlera donc des filtres récursifs ou non récursifs.

➤ Catégories des filtres

□ Filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII)

- ❖ Si $a_k \neq 0$, les filtres RII sont récurrents, la sortie $y(n)$ dépend à la fois des entrées et des sorties précédentes;
- ❖ La fonction de transfert $H(z)$ contenant des pôles;
- ❖ Si $N(z)$ n'est pas divisible par $D(z)$ on a un nombre infini de termes dans la division polynomiale de $\frac{N(z)}{D(z)}$

➤ Exemple

□ Soit la réponse impulsionnelle $h(n) = a^n 1(n)$

□ La fonction de transfert: $H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$

□ L'équation aux différences déduite de la transformée en z $Y(z) = X(z) + aY(z)z^{-1}$ est donnée par:

$$y(n) = x(n) + ay(n-1)$$

 Récursivité

□ Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)

- ❖ si $a_n = 0$ le filtre s'appelle non récursif ou RIF (à Réponse Impulsionnelle Finie) ;
- ❖ La fonction de transfert $H(z)$ contenant que des zéros;
- ❖ $H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}$, avec N est la longueur de la réponse impulsionnelle du filtre;
- ❖ La sortie est définie comme suit:
$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(n-k) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) x(n-k)$$
- ❖ Largement utilisés: ils possèdent des propriétés uniques (phase linéaire, stabilité, flexibilité).

➤ Exemple

❖ Les filtres FIR sont des filtres non-récurrents, mais pouvant être réalisés selon une structure récurrente

□ Soit $h(n) = 1(n) - 1(n - N)$

□ $y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n - k)$

Engendre une structure non-récurrente

□ $H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{z^{-N}}{1-z^{-1}} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$

□ $y(n) = x(n) - x(n - N) + y(n - 1)$

Engendre une structure récurrente

➤ Analyse: Possibilité de filtrage sans distorsion de phase(délai constant)

□ Condition de linéarité de la phase pour (RIF)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)} \quad (1)$$

- Avec $|H(e^{j\omega})|$ est l'amplitude et $\varphi(\omega)$ est la phase;
- $\tau_g(\omega)$ le temps de propagation de groupe exprimé en unité de temps définit par:

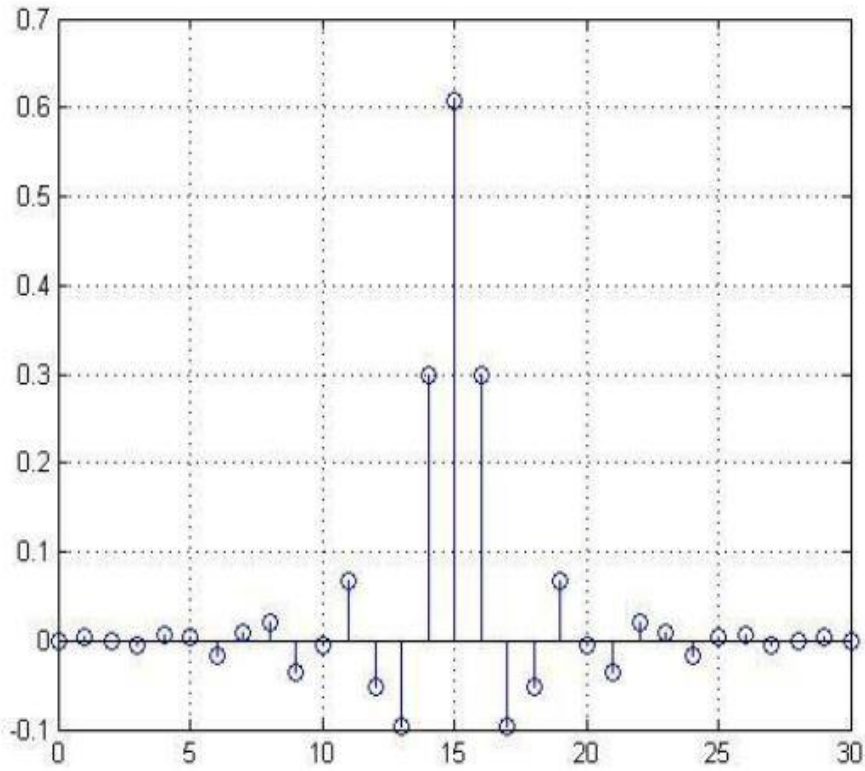
$$\tau_g(\omega) = -T \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

- Imposons $\varphi(\omega) = -m\omega + \varphi_0$ (linéaire);
- Résolution de l'équation (1) aboutit à deux solutions

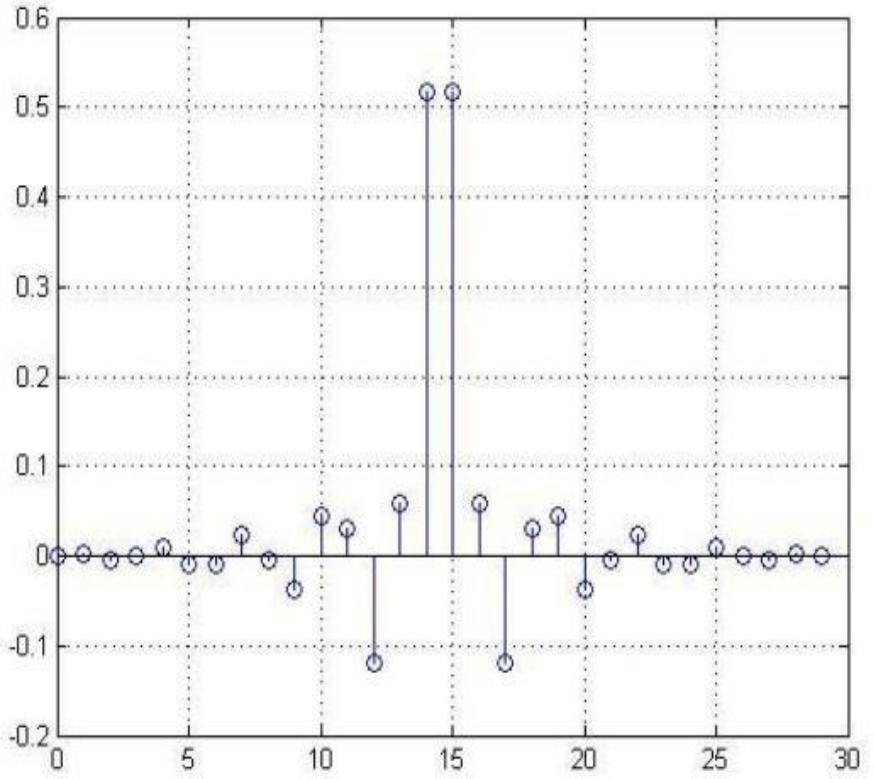
- Pour chaque valeur de N , une seule valeur m assure une phase strictement linéaire dont la réponse $h(n)$ est symétrique soit:

$$\begin{cases} h(n) = h(N - n - 1) \\ m = \frac{N - 1}{2}, 0 \leq n \leq N - 1 \\ \varphi_0 = 0 \end{cases}$$

- Si N est impair, m et $\tau_g(\omega)$ sont tous les deux des entiers. Le centre de symétrie de la réponse impulsionnelle coïncide avec un échantillon;
- Si N est pair, m n'est pas entier. Le centre de symétrie de la réponse impulsionnelle est situé entre deux échantillons.



$N = 31$ est impair

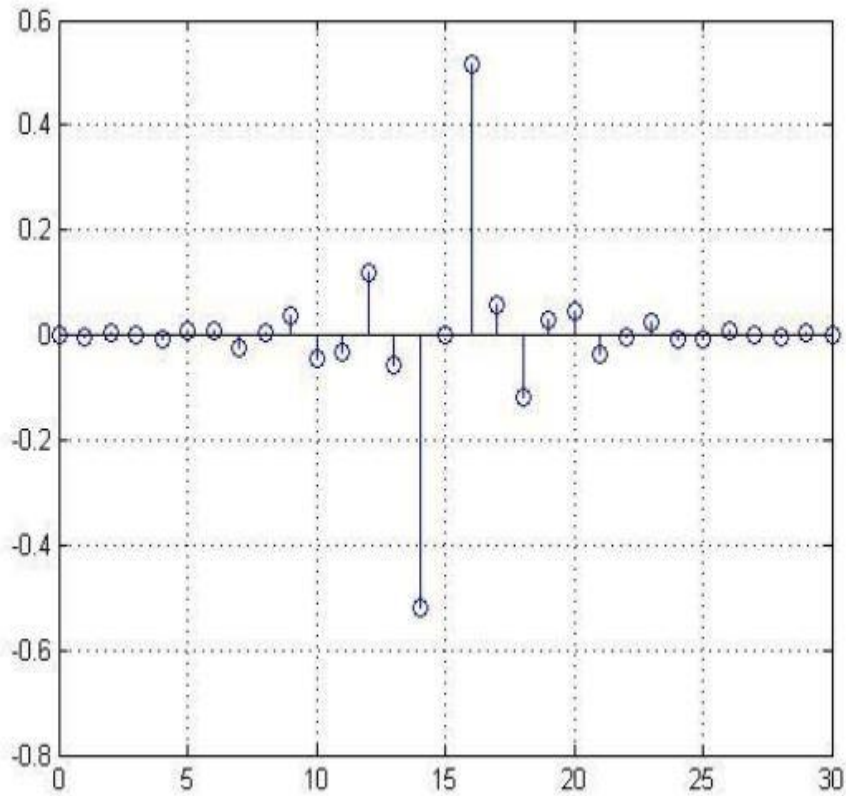


$N = 30$ est pair

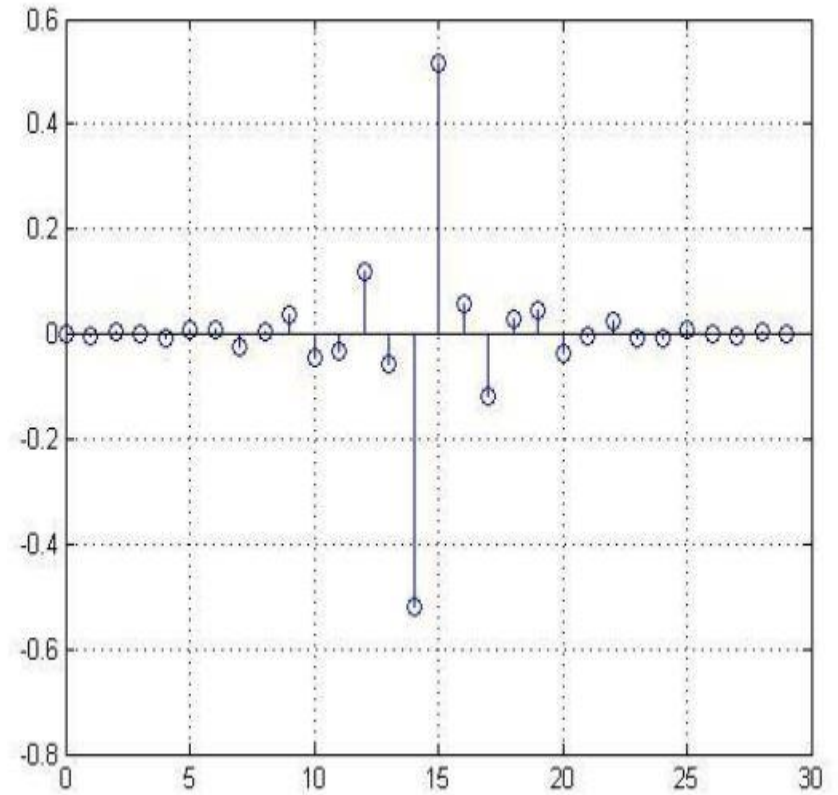
- Deuxième solution est donnée par:

$$\begin{cases} h(n) = -h(N - n - 1) \\ m = \frac{N - 1}{2}, 0 \leq n \leq N - 1 \\ \varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- La réponse impulsionnelle $h(n)$ est antisymétrique;
- Si N est impair, le point de symétrie de la réponse impulsionnelle coïncide avec un échantillon;
- Si N est pair, le point de symétrie de la réponse impulsionnelle est situé entre deux échantillons.



$N = 31$ est impair



$N = 30$ est pair

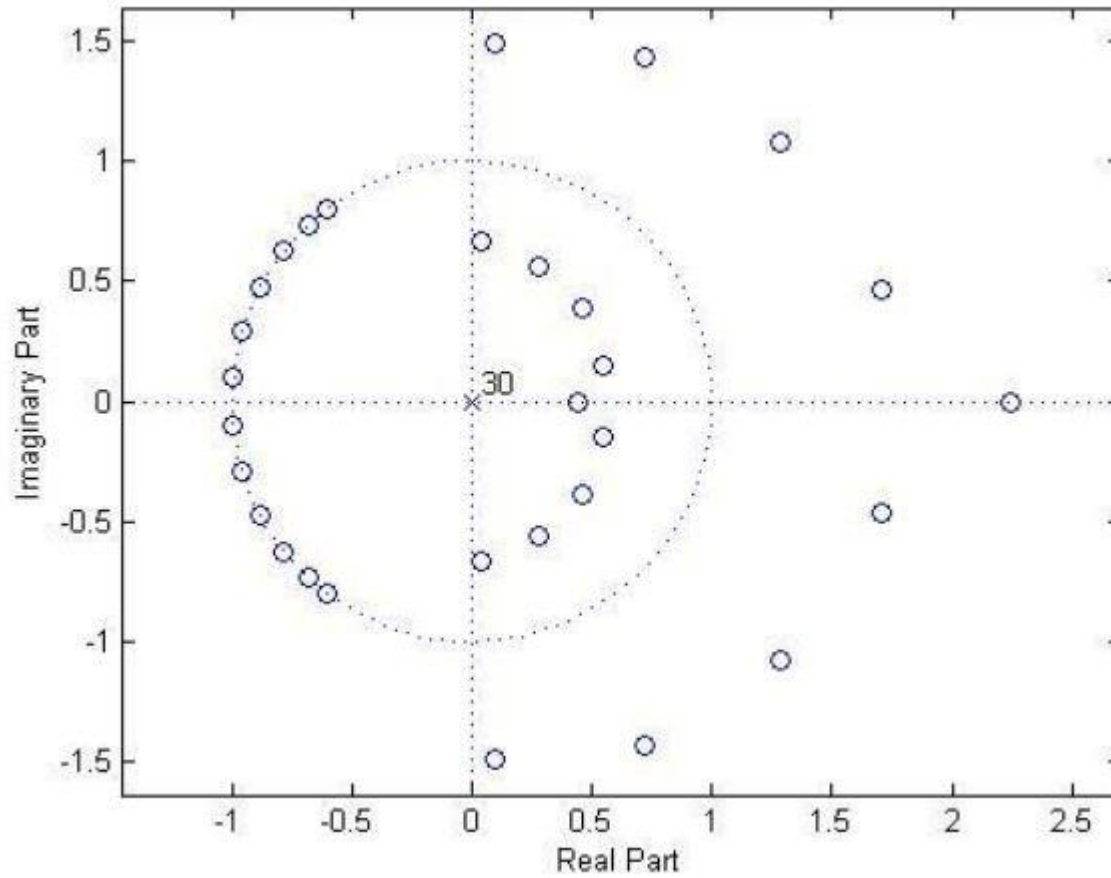
□ Pour un filtre RIF avec une phase linéaire nous avons quatre types possibles:

- Type I: N est impair ($N = 2l + 1$) $\implies h(n) = h(N - n - 1)$
 - ✓ Déphasage $\varphi(\omega) = -\omega \frac{\tau}{T}$, temps de propagation de groupe $\tau = lT$
- Type II: N est pair ($N = 2l$) $\implies h(n) = h(N - n - 1)$
 - ✓ Déphasage $\varphi(\omega) = -\omega \frac{\tau}{T}$, et $\tau = (l - \frac{1}{2})T$
- Type III: N est impair ($N = 2l + 1$) $\implies h(n) = -h(N - n - 1)$
 - ✓ Déphasage $\varphi(\omega) = -\omega \frac{\tau}{T} + \frac{\pi}{2}$, temps de propagation de groupe $\tau = lT$
- Type II: N est pair ($N = 2l$) $\implies h(n) = -h(N - n - 1)$
 - ✓ Déphasage $\varphi(\omega) = -\omega \frac{\tau}{T} + \frac{\pi}{2}$, et $\tau = (l - \frac{1}{2})T$

- À partir des conditions de la symétrie et antisymétrie des filtre RFI, on peut localiser le zéros associés à $H(z)$, nous avons alors la relation suivante:

$$H(z^{-1}) = \pm z^{N-1} H(z)$$

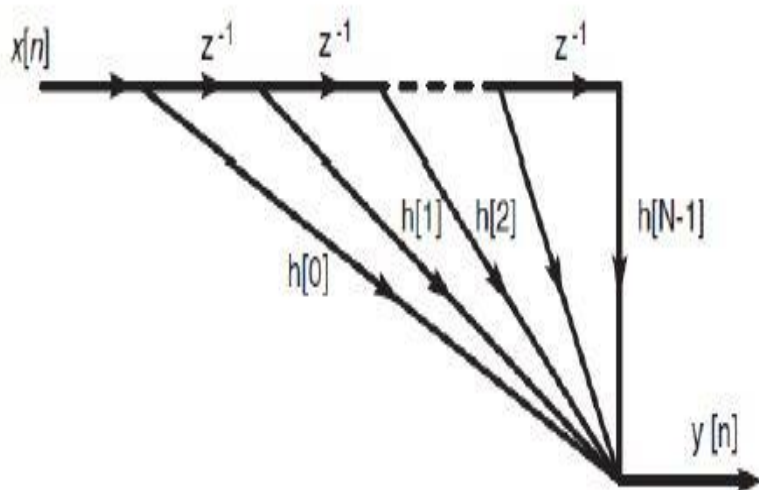
- Les zéros de $H(z)$ sont aussi les zéros de $H(z^{-1})$;
- Les zéros des filtres RIF à phase linéaire sont situés sur le cercle unité ($r_k = |z_k| = 1$), ou se présentent en symétrie quadrantale ($r_k \neq 1$),



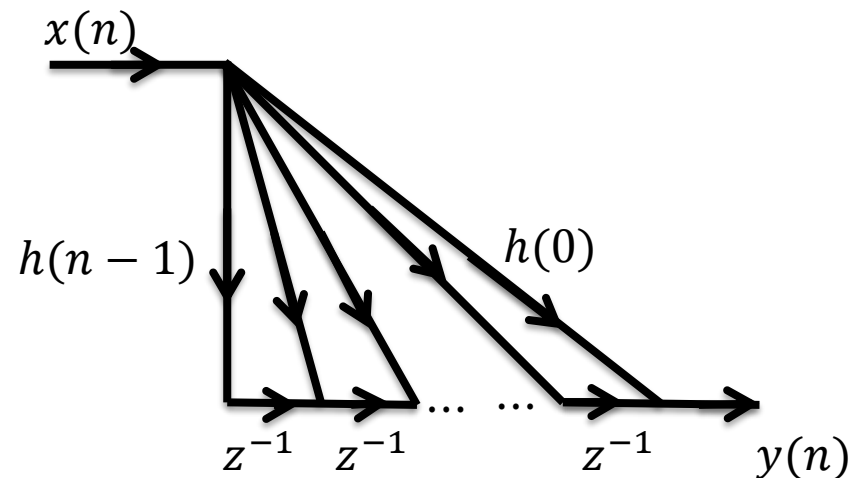
➤ Structure de réalisation des filtres RIF à phase linéaire

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(n-k) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) x(n-k)$$

■ Forme directe



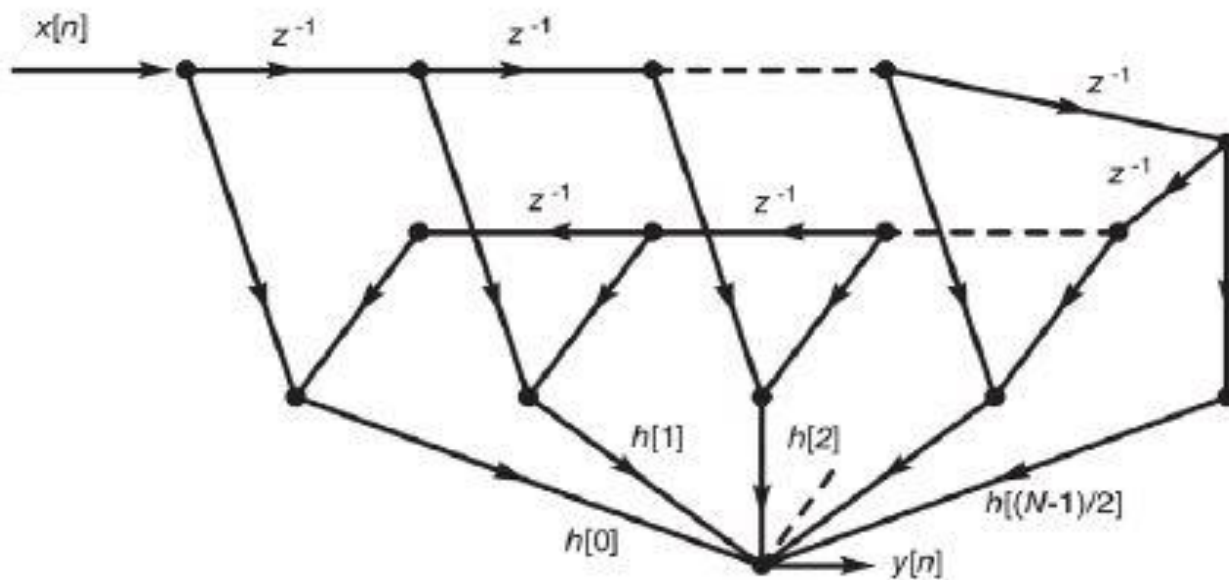
■ Forme transposée



■ Diminution du nombre de multiplication

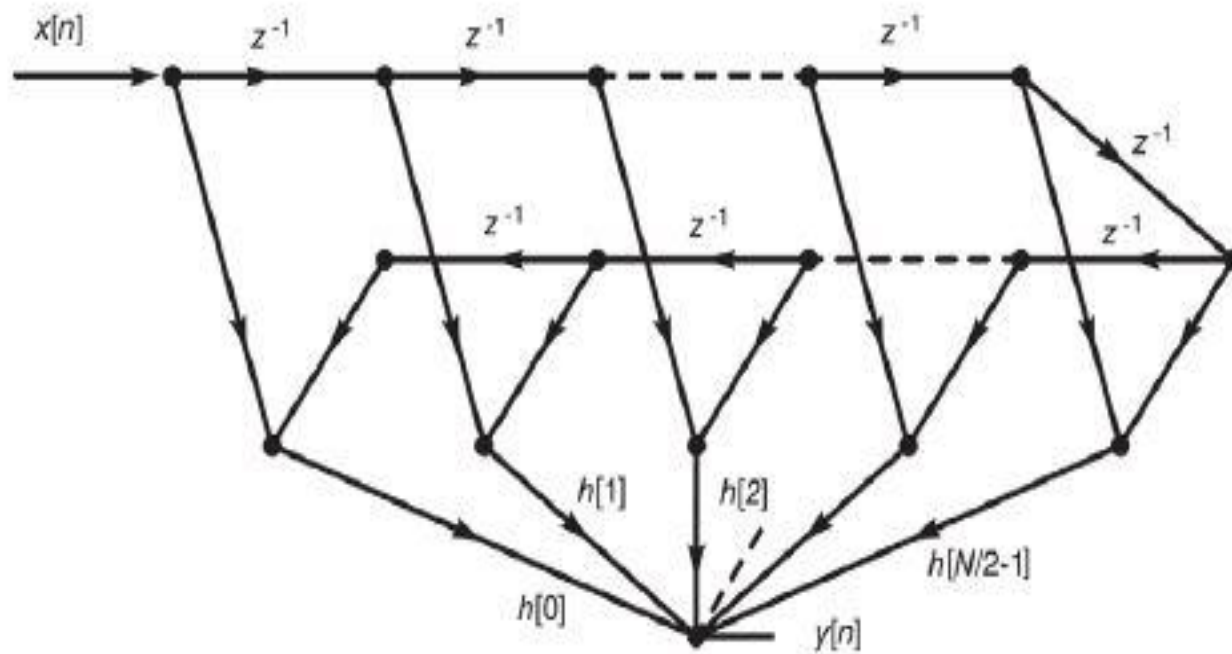
❖ N est impair

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n) \left(z^{-n} + z^{-(N-1-n)} \right) + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}}$$



❖ N est pair

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) (z^{-n} + z^{-(N-1-n)})$$



➤ Design d'un filtre RII: Invariance à l'impulsion

□ Principe : Échantillonnage de la réponse impulsionnelle d'un filtre analogique

❖ Soit une fonction de transfert d'un filtre analogique (filtre passe-bas):

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^K \frac{A_k}{s - p_k} \quad \Rightarrow \quad h_a(t) = \sum_{k=1}^K A_k e^{p_k t} u(t)$$

❖ Échantillonnage selon une fréquence

$$h(n) = T h_a(nT) = T \sum_{k=1}^K A_k e^{p_k nT} u(n)$$

T pour conserver le gain du filtre

❖ Transformation inverse en z nous donne:

$$H(z) = T \sum_{k=1}^K \frac{A_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}, \quad |z| > e^{p_k T}$$

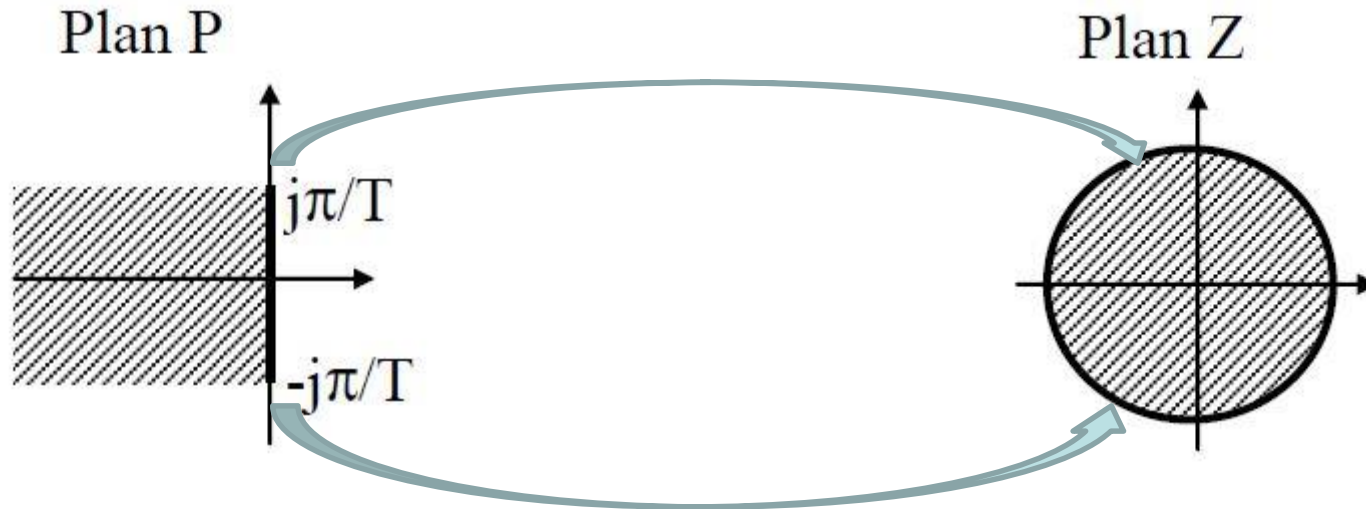
❖ Dans le domaine fréquentiel nous aurons:

$$H(e^{j\omega}) = T \frac{1}{T} \sum_n H_a \left(\frac{\omega - 2\pi n}{T} \right)$$

❖ L'échantillonnage de $h_a(nT)$ engendre du recouvrement spectral de la réponse analogique $H_a(\Omega)$

❖ Le filtre numérique garde la même forme que le filtre analogique à condition que:

$$H_a(\Omega) \approx 0, \quad |\Omega| \geq \frac{\pi}{T} \quad \text{alors} \quad H(e^{j\omega}) = H_a\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad \omega \leq \pi$$



❖ Méthode de l'invariance impulsionnelle n'est applicable qu'aux filtres à bande limitée

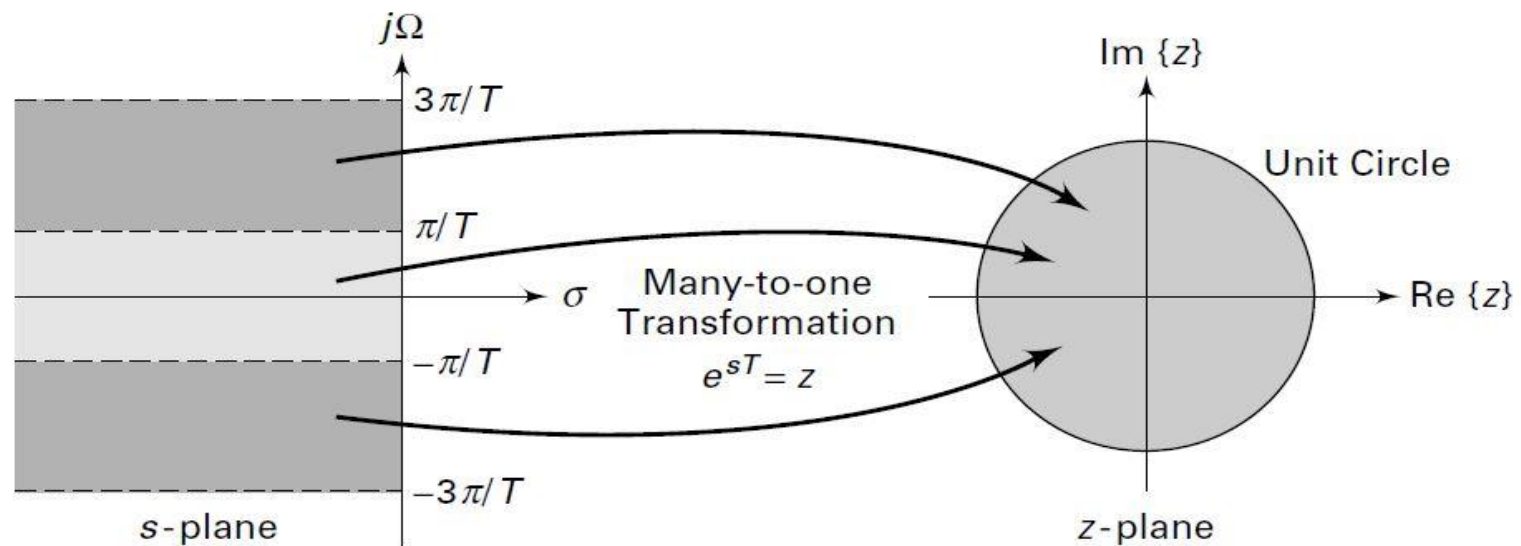
❖ Relation entre les fréquences digitale et analogique est donnée par:

$$\omega = \Omega T; e^{j\omega} = e^{j\Omega T}$$

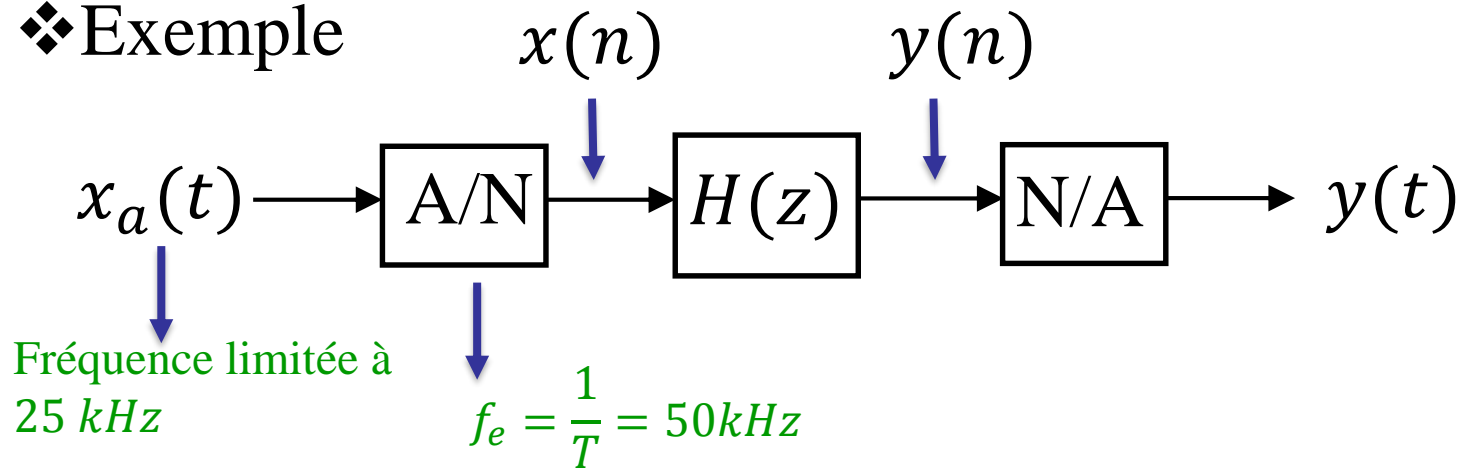
❖ Le cercle unitaire est défini par $z = e^{j\omega}$

❖ L'axe imaginaire est défini par $s = j\Omega$

❖ $z = e^{j\omega}$ est alors la transformation de s-plan à z-plan



❖ Exemple



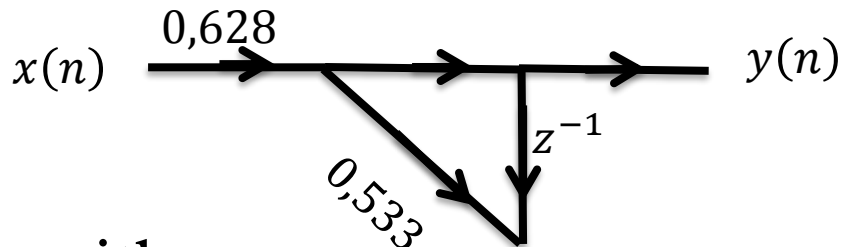
✓ $x_a(t)$ doit être filtré par un passe-bas d'ordre 1 coupant à $f_c = 5\text{kHz}$

$$H_a(s) = \frac{1}{s + 1} \bigg|_{s = \frac{s}{2\pi f_c}}^{\frac{s}{2\pi f_c}} = \frac{2\pi/10T}{s + 2\pi/10T}$$

$$H(z) = T \sum_{k=1}^K \frac{A_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}} \quad \left| \begin{array}{l} K = 1 \\ A_k = 2\pi/10T \\ p_k = -2\pi/10T \\ T = 1/50000 \end{array} \right.$$

$$\checkmark H(z) = \frac{0,628}{1 - 0,533 z^{-1}}$$

$$\checkmark y(n) = 0,628x(n) + 0,533y(n - 1)$$



✓ Algorithmme

x : Entrée Présente

y : Entrée Présente

yz : Entrée Précédente

$yz=0$

1 Lire x

$$y(n) = 0,628x + 0,533yz$$

Écrire y

$$yz = y$$

Aller à 1

➤ Design d'un filtre RII: Évaluation numérique de l'équation différentielle

- ❖ Une fonction de transfert en "s" est une équation différentielle dans le temps:

$$y(t) \xleftrightarrow{\text{Laplace}} Y(s)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \xleftrightarrow{\text{Laplace}} sY(s) \text{ (CI nulle)}$$

- ❖ Approximation numérique

$$\frac{y(n) - y(n-1)}{T} \longrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T} Y(z)$$

- ❖ On peut remplacer s par $\frac{1 - z^{-1}}{T}$

$$H(z) = H_a(s) \left| s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \right.$$

❖ Remarque: Un système analogique stable donne un système numérique stable: $Re(s) < 0, |z| < 1$

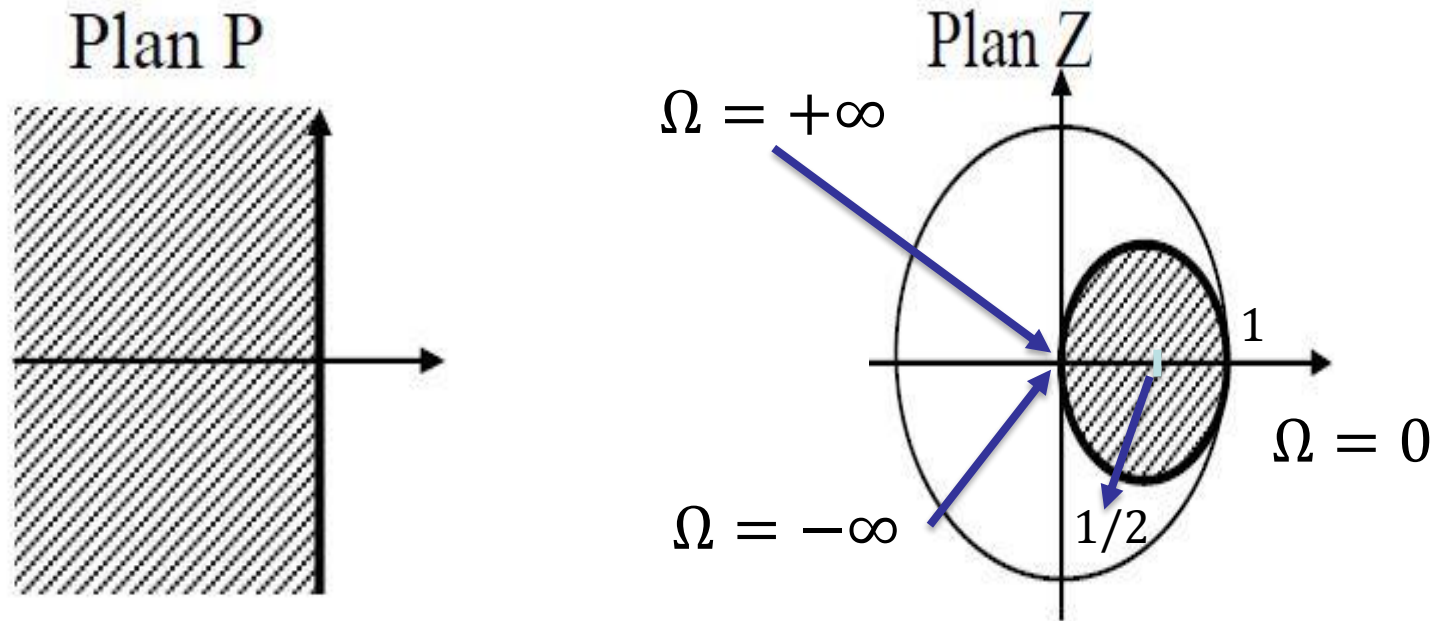
❖ Posons $s = j\Omega$ la transformation inversée est donnée par

$$z = \frac{1}{1 - j\Omega T} = \frac{1 + j\Omega T}{1 + \Omega^2 T^2}$$

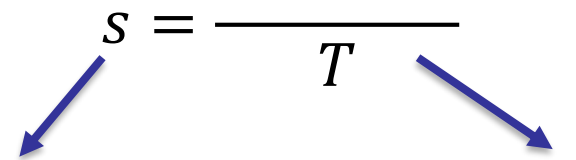
$$z = \frac{1}{2} (1 + e^{j2\varphi(\Omega)})$$

✓ Avec la phase $\varphi(\Omega) = \arg(z) = \arctan(\Omega T)$

❖ La variable z parcourt un cercle de centre $z = 1/2$ et de rayon $1/2$



❖ Posons $z = e^{j\omega}$ la transformation en s est donnée par

$$s = \frac{1 - e^{-j\omega}}{T}$$

$$Re(s) = \frac{1 - \cos \omega}{T}$$
$$j \Omega = j \frac{\sin \omega}{T}$$

$$\left(Re(s) - \frac{1}{T} \right)^2 + \Omega^2 = \frac{1}{T^2}$$

❖ La variable s parcourt un cercle de centre $s = 1/T$ et de rayon $1/T$

- ❖ L'utilisation de cette méthode n'est intéressante que si la « zone d'intérêt » de l'axe ω des fréquences numérique est très étroite. C'est le cas lorsque la fréquence d'échantillonnage est très élevée,
- ❖ Augmenter la fréquence d'échantillonnage n'est pas toujours toléré;
- ❖ L'évaluation numérique peut être effectuée selon des différences avant ou arrière d'ordre quelconque
- ❖ Réflexion:
 - ✓ Montrer qu'une approximation de dérivée par la relation

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{y(n+1) - y(n)}{T}$$

peut aboutir à des filtres numériques instables

➤ Design d'un filtre RII: Évaluation numérique de l'intégration

$$y(t), x(t) \xleftrightarrow{\text{Laplace}} Y(s), X(s)$$

$$y(t) = \int_{t_0}^t x(u) du \xleftrightarrow{\text{Laplace}} Y(s) = \frac{1}{s} X(s) \text{ (CI nulle)}$$

❖ Approximation numérique (méthode du trapèze)

$$y(n) = y(n-1) + T/2(x(n) + x(n-1))$$

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + T/2(1 + z^{-1})X(z)$$

$$Y(z) = \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} X(z)$$

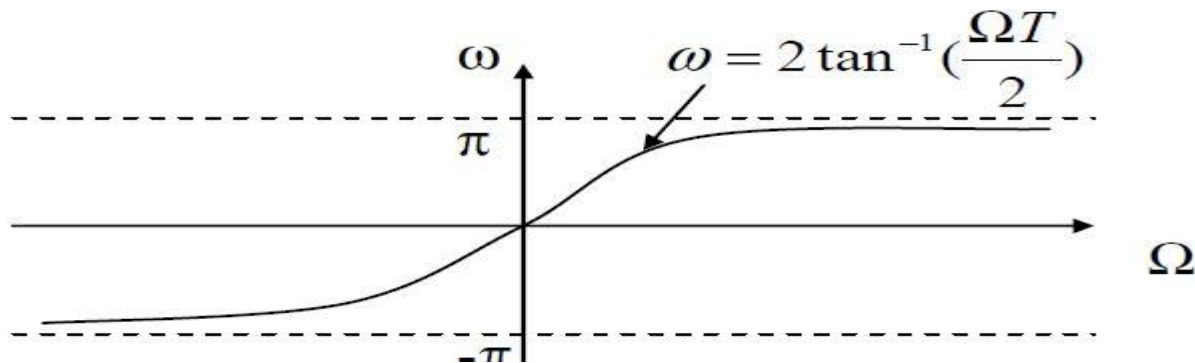
❖ La transformation bilinéaire

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

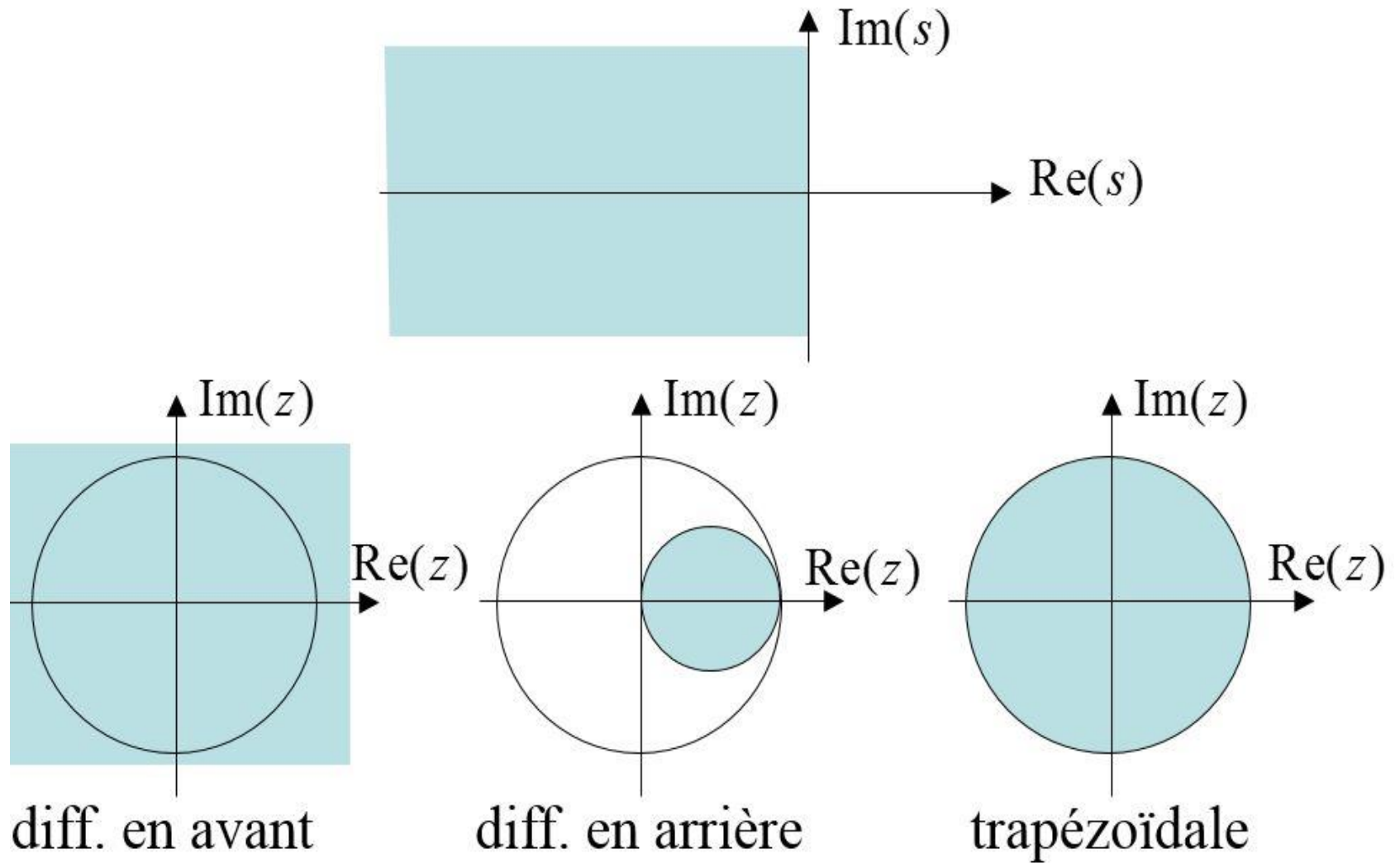
❖ Domaine fréquentiel, remplaçant $z = e^{j\omega}$

$$s = \frac{2}{T} j \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

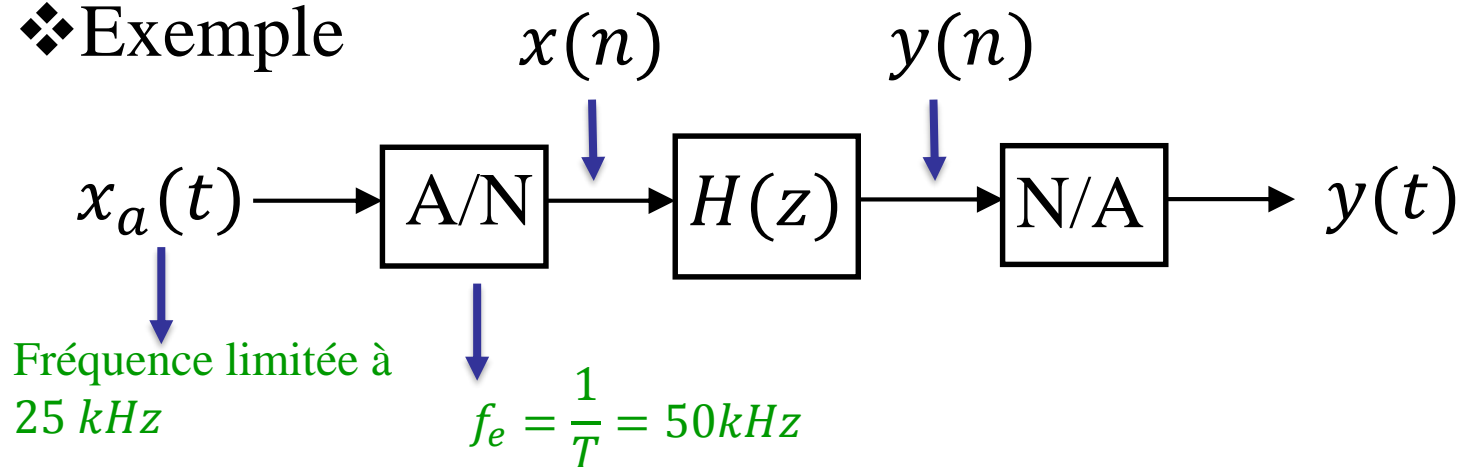
❖ Le résultat étant purement imaginaire, le cercle unité est projeté sur l'axe $j\omega$ dans le plan « s »



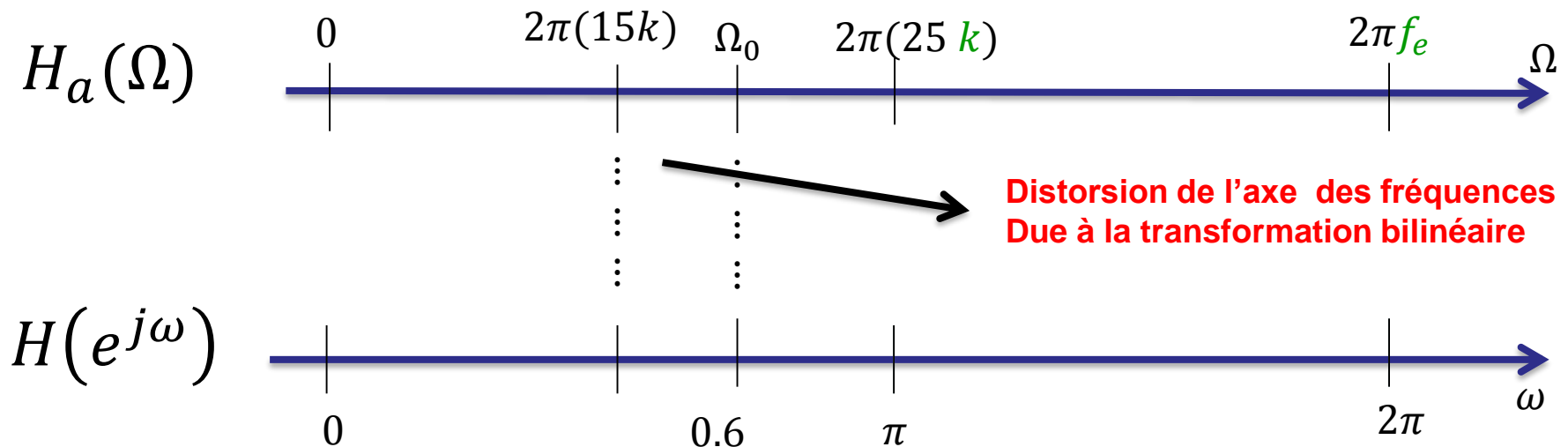
❖ Approximations numériques



❖ Exemple



✓ $x_a(t)$ doit être filtré par un passe-haut d'ordre 1 coupant à $f_c = 15\text{kHz}$



❖ Pour éviter la distorsion on prend $\omega = 0.6\pi$

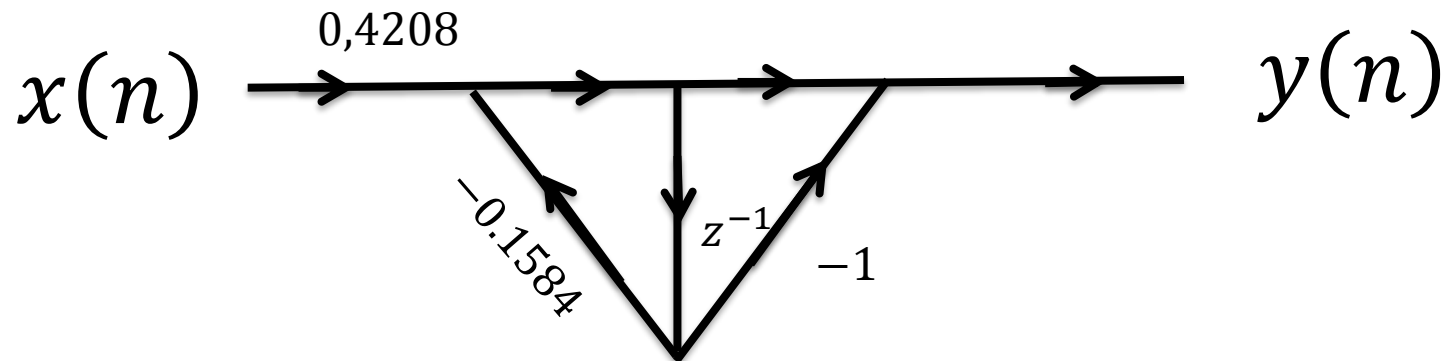
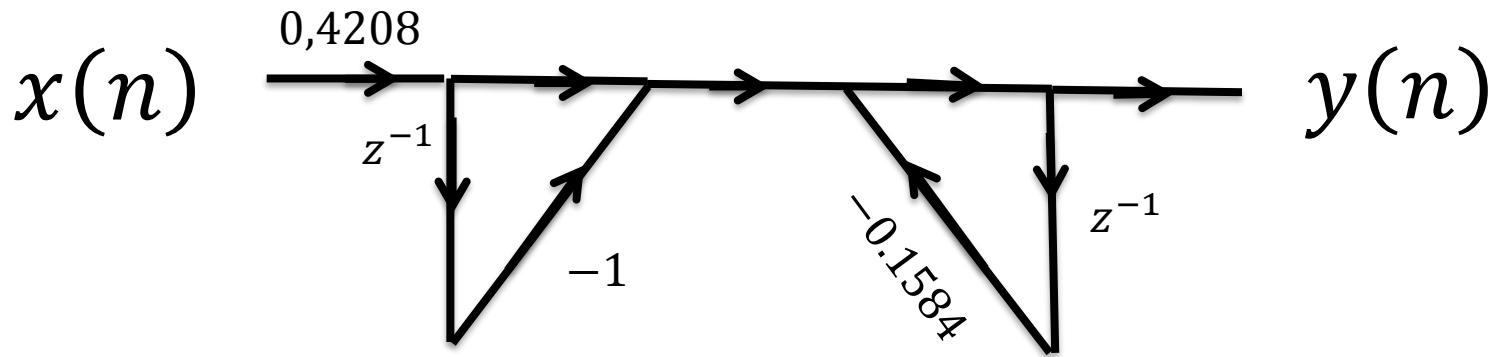
❖ Transformation bilinéaire $\longrightarrow \Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$

$$\checkmark H_a(s) = \frac{1}{1 + \frac{\Omega_0}{s}}$$

$$\checkmark H(z) = H_a(s) \Big|_s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$\checkmark H(z) = \frac{1}{\Omega_0 \frac{T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})} + 1} = \frac{1 - z^{-1}}{2.3764 + z^{-1} 0.3764}$$

$$\checkmark y(n] = 0,4208(x(n) - x(n - 1)) - 0,1584y(n - 1)$$



➤ Design d'un filtre RIF : Méthode des fenêtres

❖ Soit La fonction de transfert désirée $H_d(e^{j\omega})$:

❖ La Réponse impulsionnelle désirée du filtre est donnée par:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

❖ Tronquons $h_d(n)$ sur une fenêtre pour rendre ce filtre causal :

$$h(n) = \begin{cases} h_d(n), & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

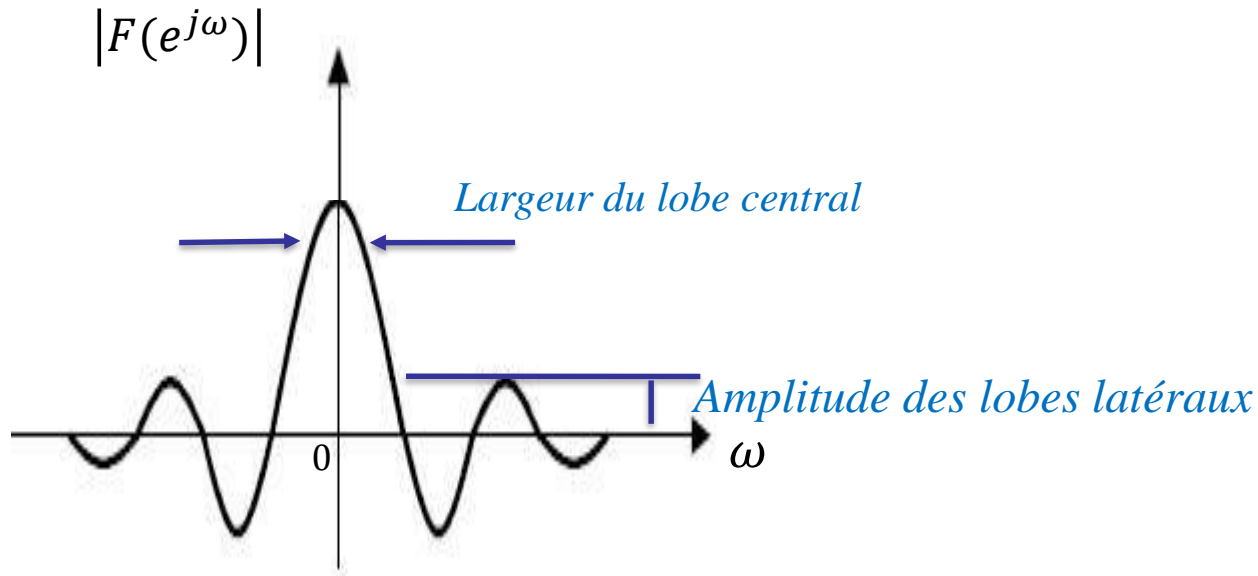
❖ $h(n)$ peut être représentée comme le produit du filtre idéal $h_d(n)$ avec une fenêtre à durée finie $f(n)$:

$$h(n) = h_d(n)f(n)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) F(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

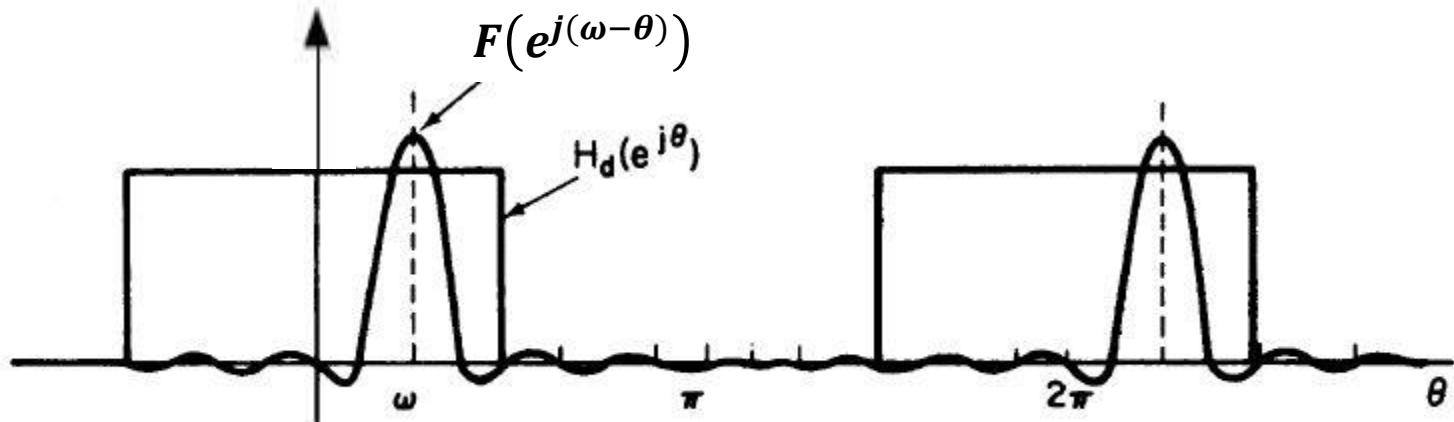
$$H(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) \circledast F(e^{j\omega})$$

❖ Idéalement: $F(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega)$, $-\pi \leq \omega \leq \pi$
 $f(n) = 1$

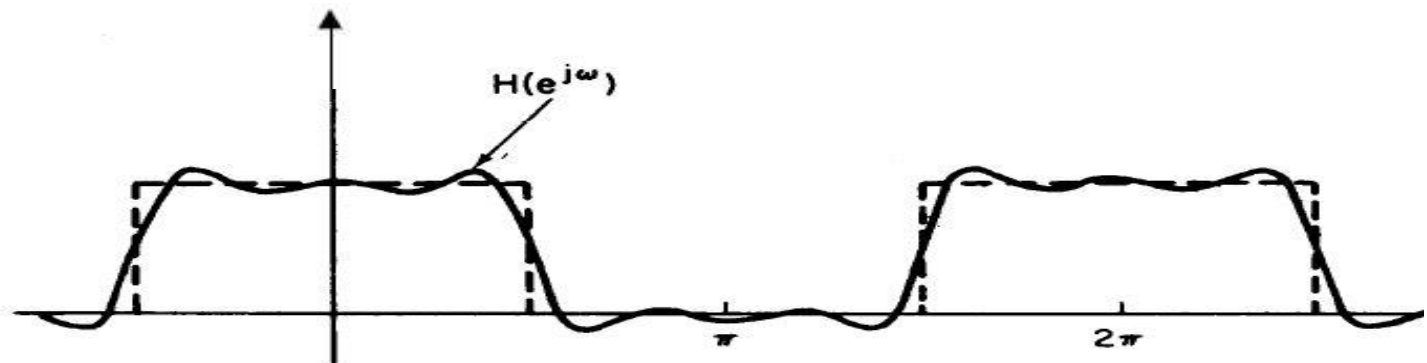


❖ En pratique $F(e^{j\omega})$ doit être le plus étroit possible

- ❖ La multiplication dans le temps correspond à une convolution dans le domaine de fréquence :

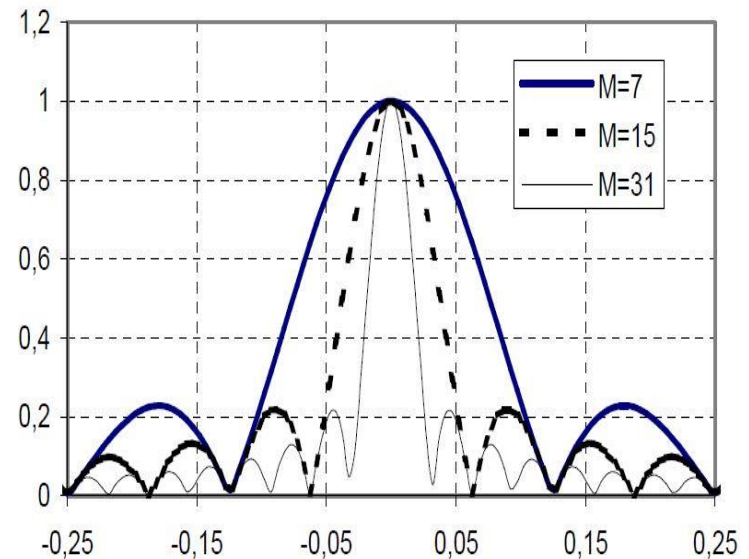


- ❖ La réponse fréquentielle résultant est la réponse "arrondie" du filtre désiré



- ❖ Discontinuités du filtre idéal sont remplacées par des ondulations autour de ces sauts;
- ❖ Plus la variation de $H_d(e^{j\omega})$ est important, plus nous avons besoins d'un $F(e^{j\omega})$ pointu ce qui se traduit par une fenêtre plus longue;
- ❖ En augmentant le M , la largeur (fréquentielle) du lobe principal de $F(e^{j\omega})$ diminue

$$❖ f(n) = \begin{cases} 1, & 0 < n \leq M - 1 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$



❖ Autres méthodes de fenêtrage:

✓ Bartlett (Triangulaire):

$$f(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 < n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \\ 0, & n < 0 \text{ et } n \geq N \end{cases}$$

✓ Hanning:

$$f(n) = \begin{cases} 0,5 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), & 0 < n \leq N-1 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

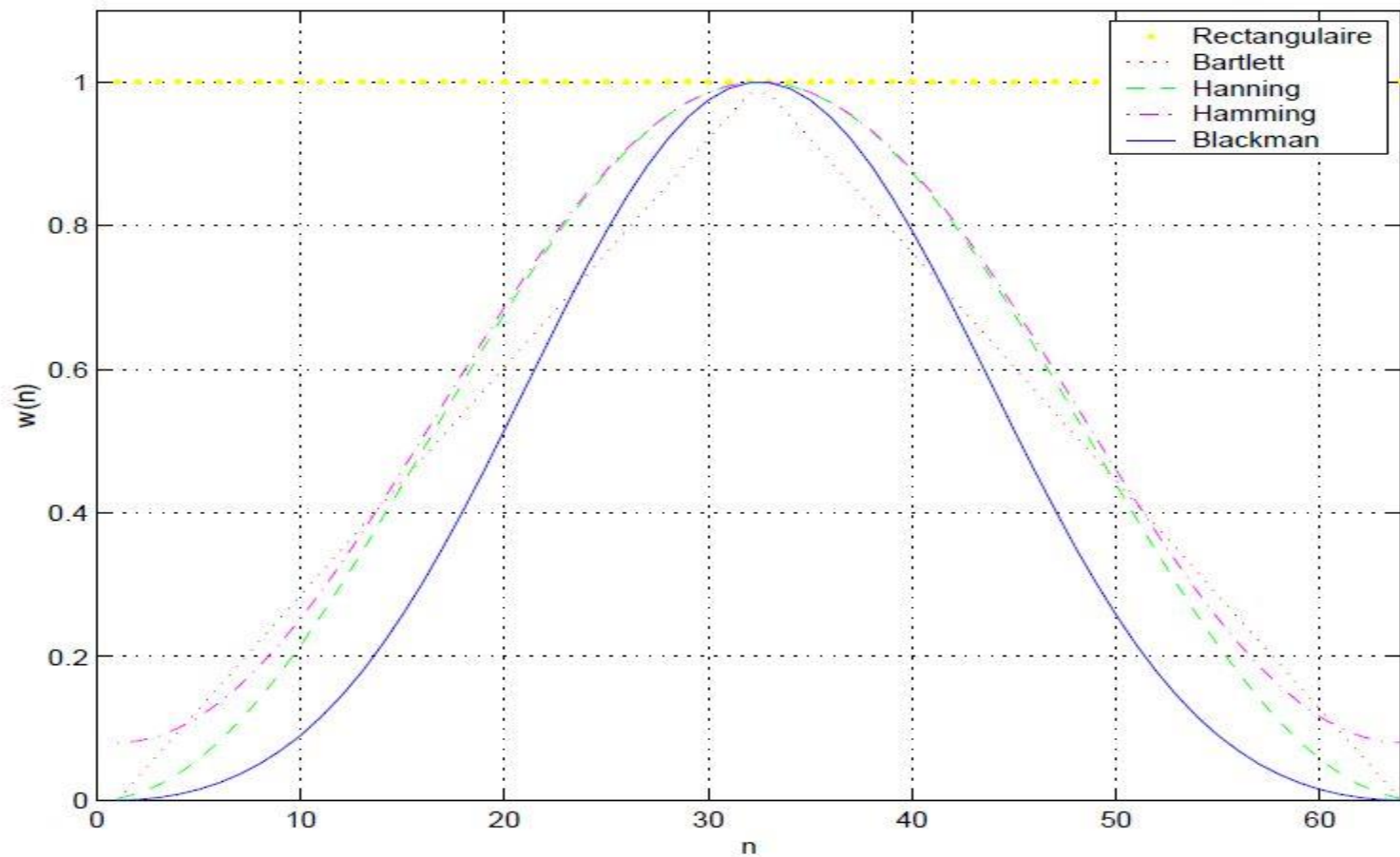
✓ Hamming:

$$f(n) = \begin{cases} 0,5 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), & 0 < n \leq N-1 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

✓ Blackman:

$$f(n) = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right), & 0 < n \leq N-1 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

❖ Réponses temporelles des principales fenêtres:



➤ Transformations en fréquence

- ❖ But: Modifier le type de filtre tout en maintenant la stabilité;
- ❖ Méthode: Transposer dans le domaine numérique les transformations analogiques par la transformation bilinéaire;
- ❖ Développement d'une transformation pour obtenir d'un filtre numérique, des filtres passe-bas, passe-bande, passe-haut et coupe-bande;
- ❖ Transformation doit être rationnelle et le filtre doit être stable et causal.

- ❖ Soit à obtenir $H_2(z)(\omega_c = \omega_2)$ à partir de $H_1(z)(\omega_c = \omega_1)$
 - ✓ Posons par convention z pour le filtre désiré $H_2(z)$
 - ✓ Posons par convention Z pour le filtre d'origine $H_1(Z)$
- ❖ Soit $G(z^{-1})$ la Transformation qui projette l'intérieur du cercle unité sur le plan Z à l'intérieur du cercle unité sur le plan z :

$$Z^{-1} = G(z^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k z^{-1}}, \quad |\alpha_k| < 1$$

- ❖ Transformation la plus simple (passe-bas – passe-bas):

$$Z^{-1} = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$$

- ❖ Présentation fréquentielle:
 - ✓ $Z = e^{j\omega_1}$, Cercle unité sur le plan Z pour le filtre de départ $H_1(Z)$
 - ✓ $z = e^{j\omega_2}$, Cercle unité sur le plan z pour le filtre obtenu $H_2(z)$

❖ Domaine analogique:

✓ Soit à obtenir $H_{a2}(s)(\Omega_c = \Omega_2)$ à partir de $H_{a1}(s)(\Omega_c = \Omega_1)$

$$H_{a2}(s) = H_{a1}(s) \left| \begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{2cm}} \\ s = \frac{s\Omega_1}{\Omega_2} \end{array} \right.$$

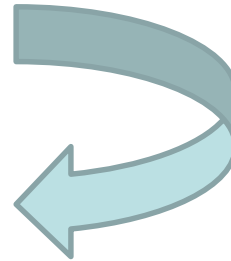
❖ Utilisation de la transformation bilinéaire:

$$H_2(z) = H_1(z) \left| \begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{2cm}} \\ \frac{2(1-Z^{-1})}{T(1+Z^{-1})} = \frac{\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}}{\Omega_2} \Omega_1 \end{array} \right.$$

$$\Omega_1 = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad \Omega_2 = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$$

❖ Développement:

$$\frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} = \frac{(1 - z^{-1}) \Omega_1}{(1 + z^{-1}) \Omega_2}$$



$$Z^{-1} = \frac{-\frac{(\Omega_1 - \Omega_2)}{(\Omega_1 + \Omega_2)} + z^{-1}}{1 - \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)}{(\Omega_1 + \Omega_2)} z^{-1}}$$

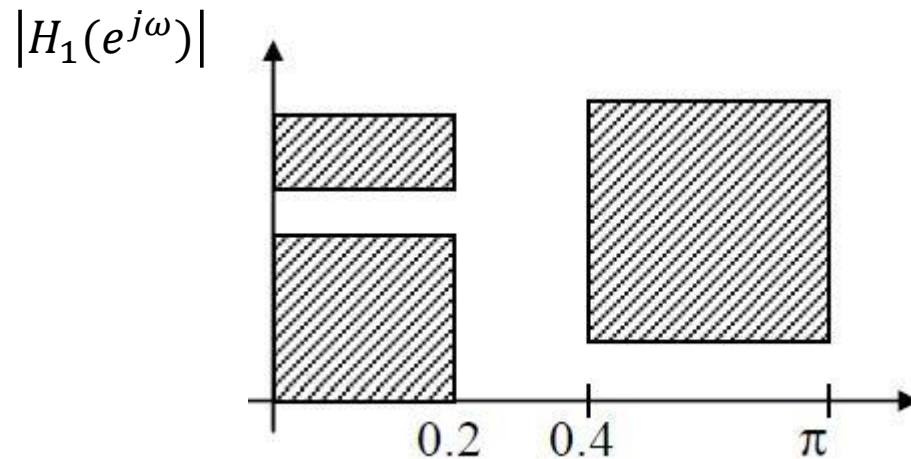
Avec:

$$\frac{(\Omega_1 - \Omega_2)}{(\Omega_1 + \Omega_2)} = \frac{\tan\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - \tan\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\omega_1}{2}\right) + \tan\left(\frac{\omega_2}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)}$$

$$H_2(z) = H_1(z) \left| \begin{array}{l} \xrightarrow{\hspace{2cm}} \\ z^{-1} = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \end{array} \right. \quad \text{Avec:} \quad \alpha = \frac{\sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)}$$

➤ Exemple:

- ✓ Le gabarit d'un filtre passe-bas est donné sur la figure ci-dessous. Sachant que le paramètre $\alpha = 0,5$, tracez le gabarit du filtre obtenu par la transformation ci-dessus.

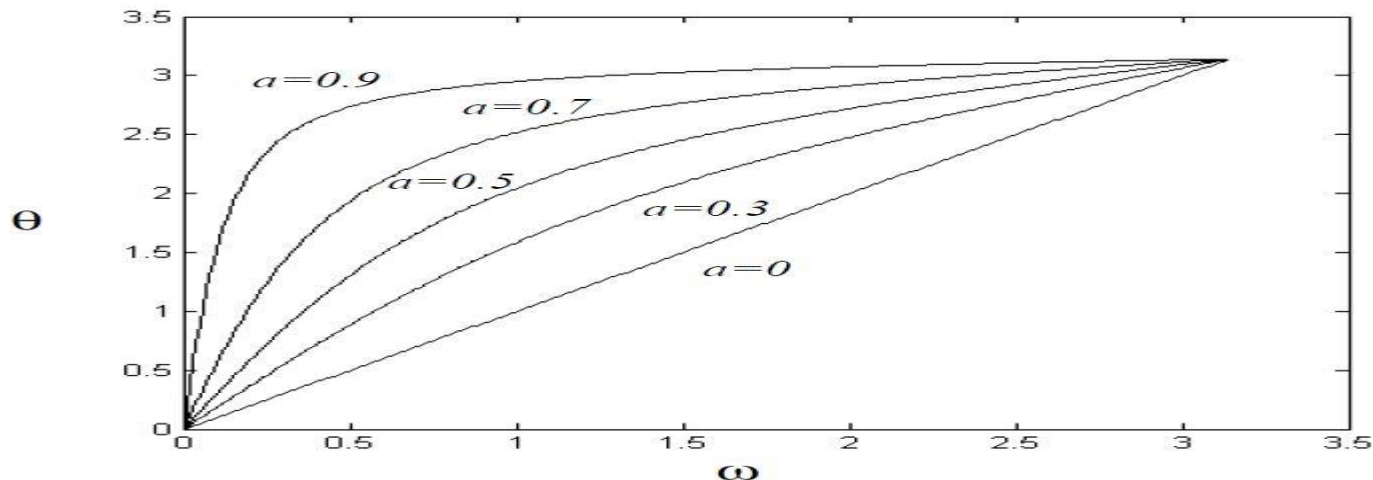


✓ À partir de $z^{-1} = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$ on peut écrire la relation suivante

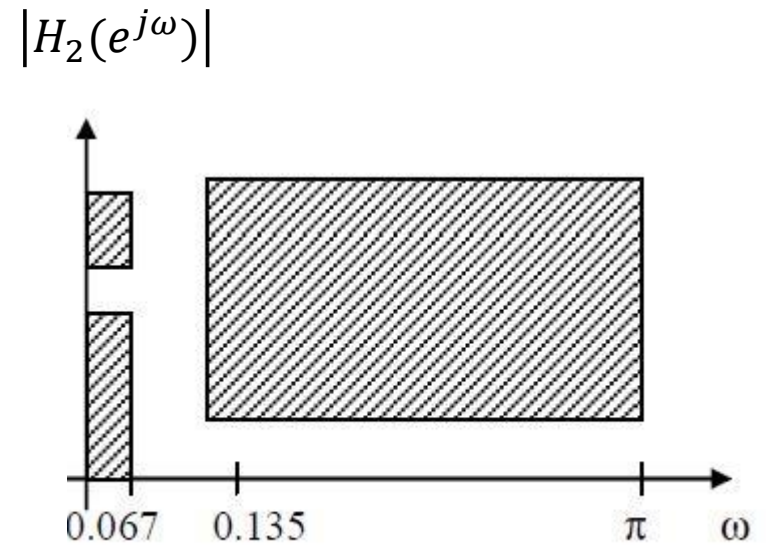
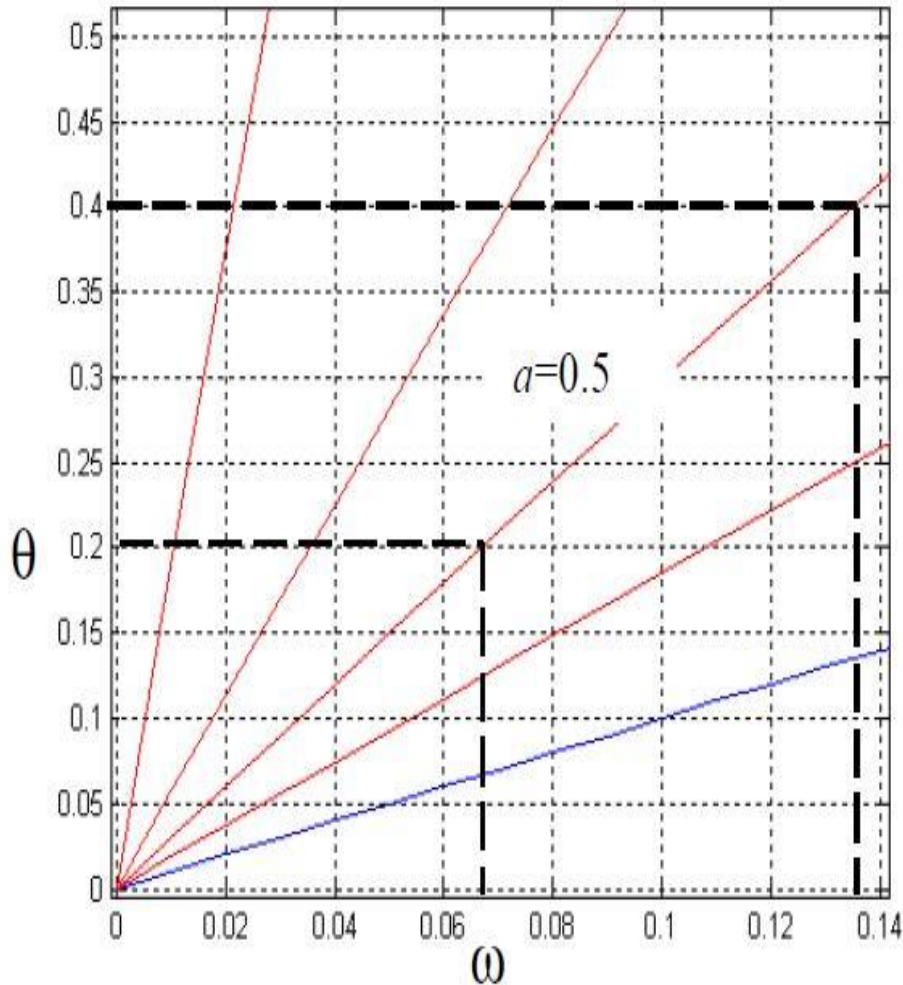
$$e^{-j\theta} = \frac{e^{-j\omega} - \alpha}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

- ✓ $Z = e^{j\theta}$, Cercle unité sur le plan Z pour le filtre de départ $H_1(Z)$
- ✓ $z = e^{j\omega}$, Cercle unité sur le plan z pour le filtre obtenu $H_2(z)$

$$\omega = \tan^{-1} \left(\frac{(1 - \alpha^2) \sin(\theta)}{2\alpha + (1 + \alpha^2) \cos(\theta)} \right)$$



➤ En appliquant la formule on obtient:



➤ Autres transformations

TRANSFORMATIONS FROM A LOWPASS-DIGITAL-FILTER PROTOTYPE OF CUTOFF FREQUENCY θ_p

Filter Type	Transformation	Associated Design Formulas
Lowpass	$z^{-1} = \frac{Z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha Z^{-1}}$	$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\theta_p - \omega_p}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_p + \omega_p}{2}\right)}$ $\omega_p = \text{desired cutoff frequency}$
Highpass	$-\frac{Z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha Z^{-1}}$	$\alpha = -\frac{\cos\left(\frac{\omega_p + \theta_p}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_p - \theta_p}{2}\right)}$ $\omega_p = \text{desired cutoff frequency}$
Bandpass	$-\frac{Z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} Z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1} Z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} Z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)}$ $k = \cot\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) \tan \frac{\theta_p}{2}$ $\omega_2, \omega_1 = \text{desired upper and lower cutoff frequencies}$
Bandstop	$\frac{Z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k} Z^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k} Z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k} Z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)}$ $k = \tan\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) \tan \frac{\theta_p}{2}$ $\omega_2, \omega_1 = \text{desired upper and lower cutoff frequencies}$

➤ Effet de la précision finie dans la réalisation des filtre numérique

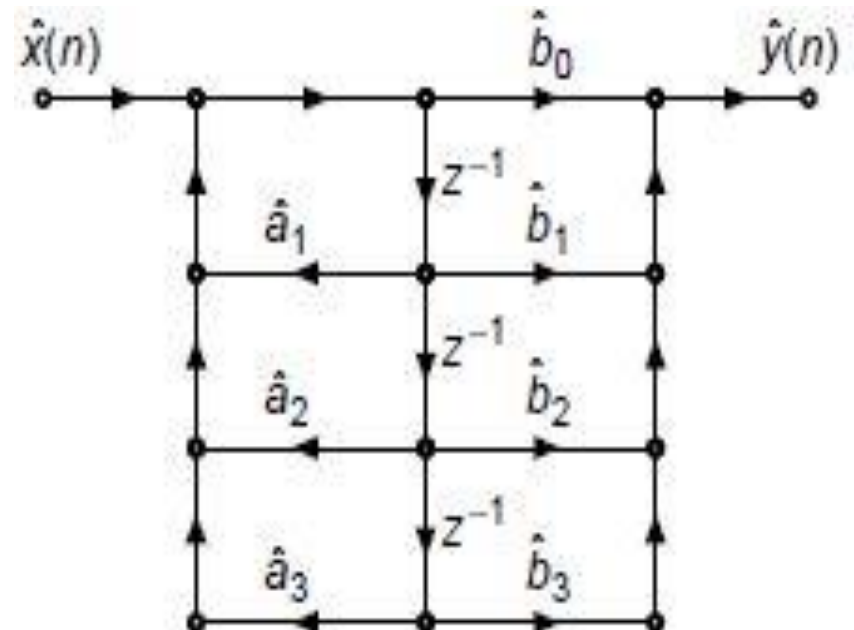
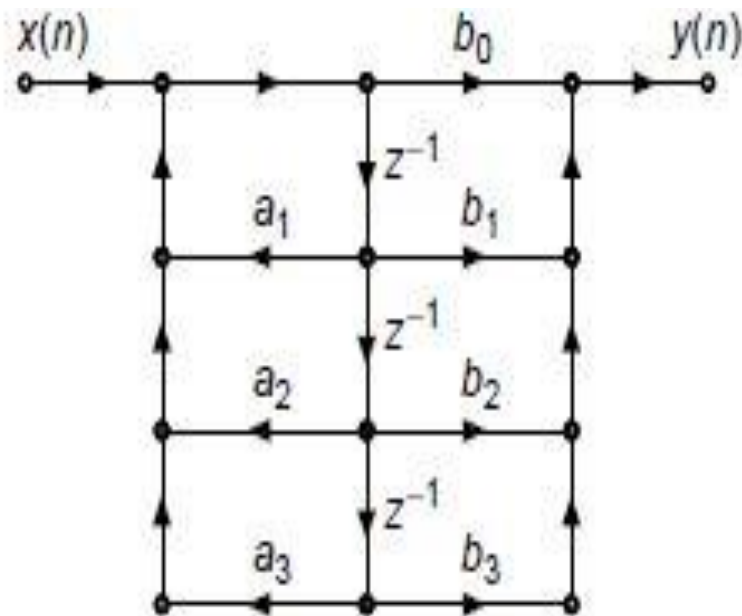
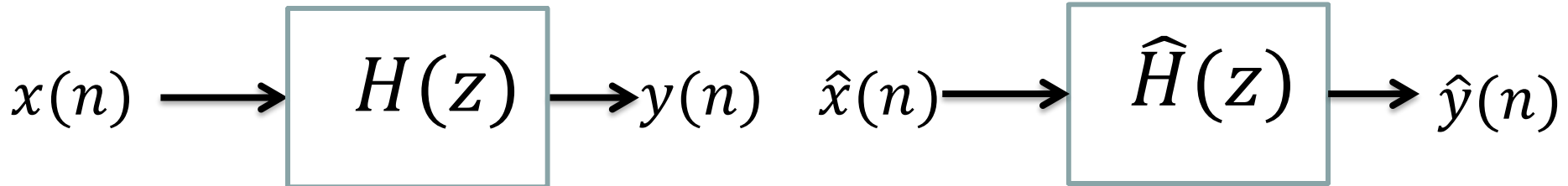
❖ Problématique:

- ✓ Utilisation de coefficients avec précision finie;
- ✓ Obtention de résultats intermédiaires et finals avec précision finie.

❖ Facteurs déterminants:

- ✓ Type de quantification (quantification par arrondi ou par troncature);
- ✓ Type d'arithmétique (point fixe ou flottante, binaire, avec signe, complément de 1, de 2,...).

❖ Quantification des coefficients



Structure directe canonique(forme II).
Précision infinie

Structure directe canonique forme II.
Précision finie

❖ Soit $H(z)$ un filtre IIR:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

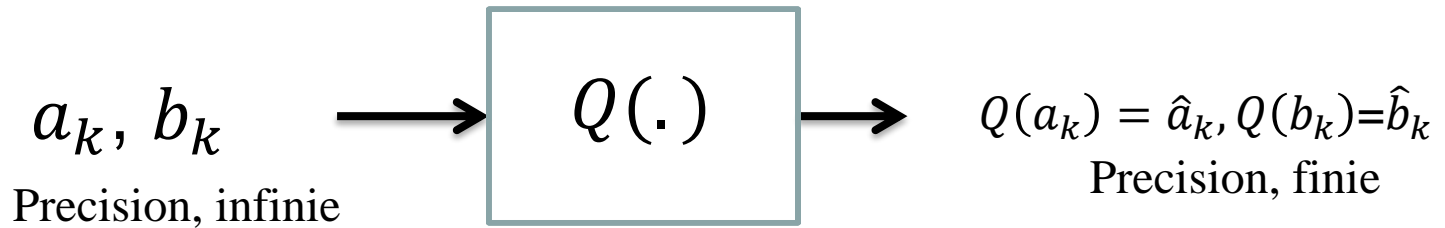
✓ a_k et b_k sont les coefficients de $H(z)$ représentés par

❖ $\hat{H}(z)$ le filtre IIR réalisé par précision finie

$$\hat{H}(z) = \frac{\sum_{k=0}^M \hat{b}_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N \hat{a}_k z^{-k}}$$

✓ \hat{a}_k et \hat{b}_k des nombres avec précision finie: les quantifiants des coefficients a_k et b_k

❖ Bloque de quantification:



$$H_Q(z) = \frac{\sum_{k=0}^M Q(b_k) z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N Q(a_k) z^{-k}}$$

❖ Erreur de la quantification est donné par:

$$\Delta a_k = Q(a_k) - a_k, \quad \Delta b_k = Q(b_k) - b_k$$

❖ Effet de quantification sur le placement des pôles-zéros du filtre

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$
$$H(z) = \frac{b_0(1 - z_1 z^{-1}) \cdots (1 - z_M z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1}) \cdots (1 - p_N z^{-1})} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

❖ Analyse de la stabilité du filtre


$$D(z) = D(p_1, \dots, p_N) = \prod_{l=1}^N (1 - p_l z^{-1})$$

✓ Avec $p_l = f(a_1, \dots, a_N)$, $l = 1, \dots, N$.

❖ Erreur sur les pôles

$$dp_l = \sum_{k=1}^N \frac{\partial p_l}{\partial a_k} da_k \xrightarrow{\Delta} \Delta p_l = \sum_{k=1}^N \frac{\partial p_l}{\partial a_k} \Delta a_k$$

➤ Avec:

$$\frac{\partial p_l}{\partial a_k} = - \frac{p_l^{N-k}}{\prod_{i=1, i \neq l}^N (p_l - p_i)}$$


Formule mesurant le mouvement de l^{ieme} pôle p_l versus le coefficient a_k .

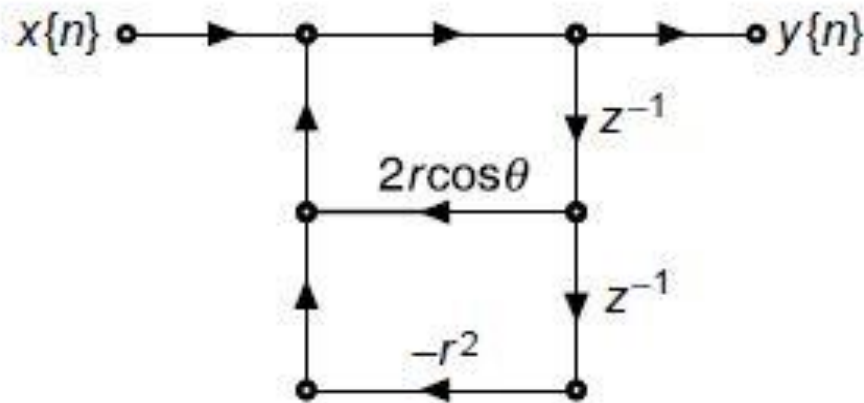
Sensibilité

❖ Exemple

Cosiderons un IIR dont $H(z)$ est donnée par:

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

➤ $a_1 = -0.9$, $a_2 = 0.81$ et $b_0 = 1$



Réalisation du filtre IIR

➤ Représentons les coefficients a_1 et a_2 sur 3-bits signés

✓ $\hat{a}_1 = 1,111 = -0.875$ et $\hat{a}_2 = 0,110 = +0.75$

✓ $|\Delta a_1| = 0.025$ et $|\Delta a_2| = 0.06$

✓ $\frac{\partial p_1}{\partial a_1} = -\frac{p_1^{2-1}}{(p_1-p_2)} = \frac{e^{\frac{j\pi}{3}}}{\sqrt{3}}$

✓ $\frac{\partial p_2}{\partial a_2} = -\frac{p_2^{2-2}}{(p_1-p_2)} = \frac{1}{0.9\sqrt{3}}$

✓ $|\Delta p_1| \leq \left| \frac{\partial p_1}{\partial a_1} \right| |\Delta a_1| + \left| \frac{\partial p_2}{\partial a_2} \right| |\Delta a_2| = \frac{1}{\sqrt{3}} 0.0,25 + \frac{1}{0.9\sqrt{3}} 0.06 = 0.0529$

✓ $\hat{D}(z) = 1 - 0.875z^{-1} + 0.75z^{-2} = 0$



$$\hat{p}_1 = \hat{p}_2^* = 0.866e^{j0.331\pi}$$

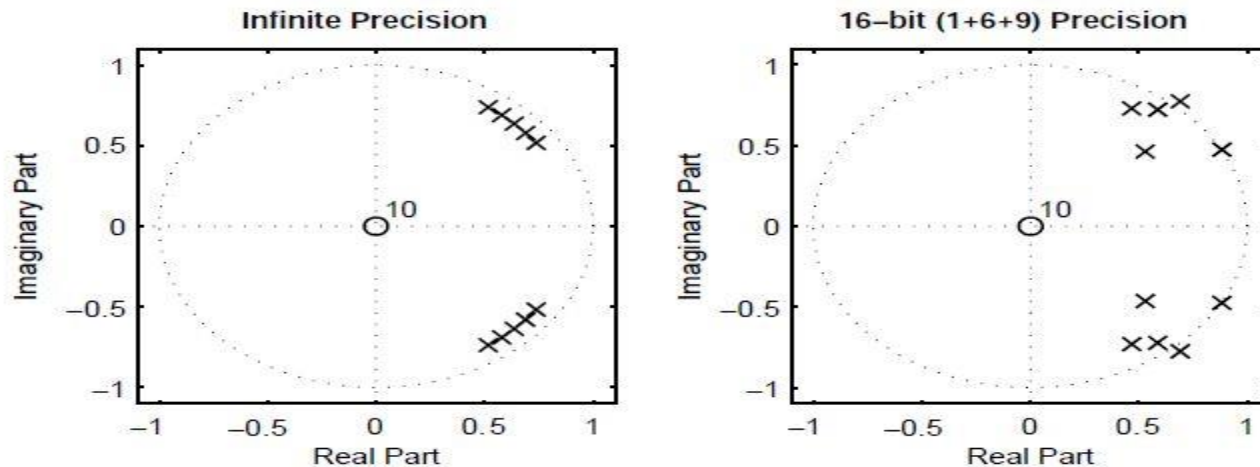
$$\checkmark \left| 0.9e^{j\pi/3} - 0.866e^{j0.331\pi} \right| = 0.0344 \leq 0.0529$$

✓ Posons $a_1 = -2r \cos(\theta)$, $a_2 = r^2$ et $b_0 = 1$



✓ Les pôles seront $\hat{p}_1 = \hat{p}_2^* = re^{j\theta}$

Pour $r = 0.9$ et $-0.3056\pi \leq \theta \leq 0.3056\pi$



❖ Effet de quantification sur la réponse impulsionnelle

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}}$$

- ✓ Si a_k et b_k sont quantifiés respectivement par \hat{a}_k et \hat{b}_k la représentation du filtre avec précision finie est donnée \hat{b}_k des nombres avec précision finie:

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M \hat{b}_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N \hat{a}_k e^{-j\omega k}}$$

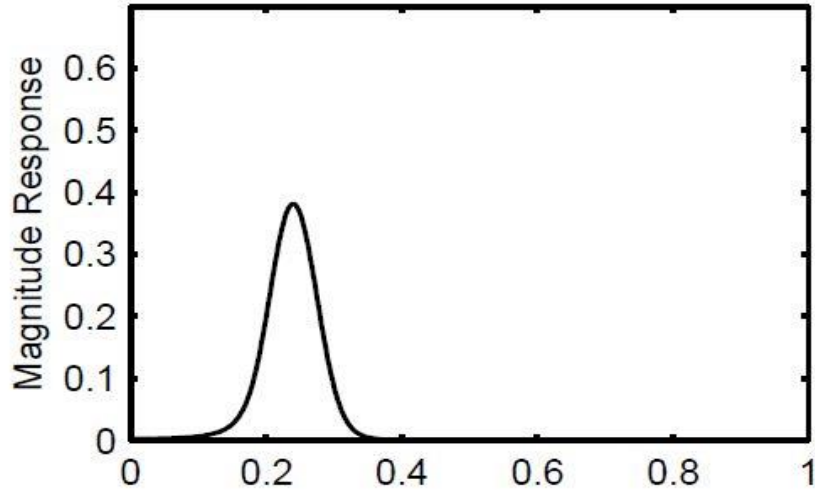
❖ Exemple

- Considérons un filtre IIR défini par

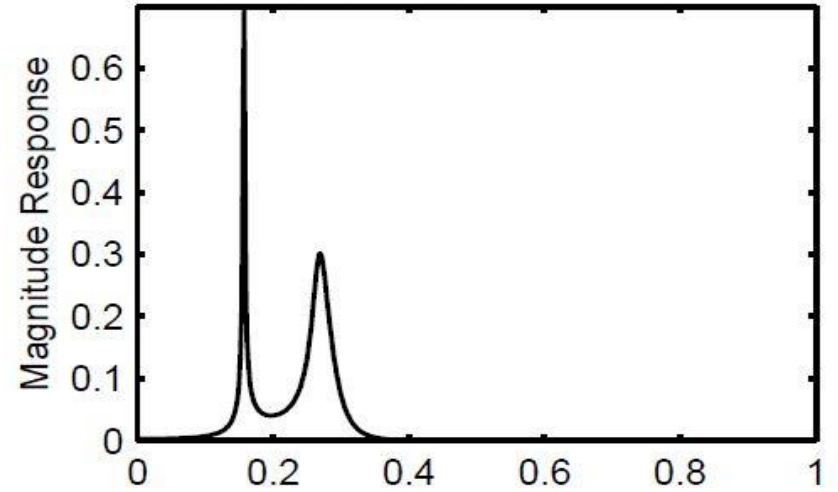
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 2r \cos(\theta) e^{-j\omega} + r^2 e^{-2j\omega}}$$

- $r = 0.9$ et $-0.3056\pi \leq \theta \leq 0.3056\pi$;
- On calcule l'amplitude de la réponse en utilisant les deux structures (directe et cascade);
- L'amplitude de la réponse sera présentée avec précision infinie puis avec précision finie codée sur 16-bits et sur 11-bits.

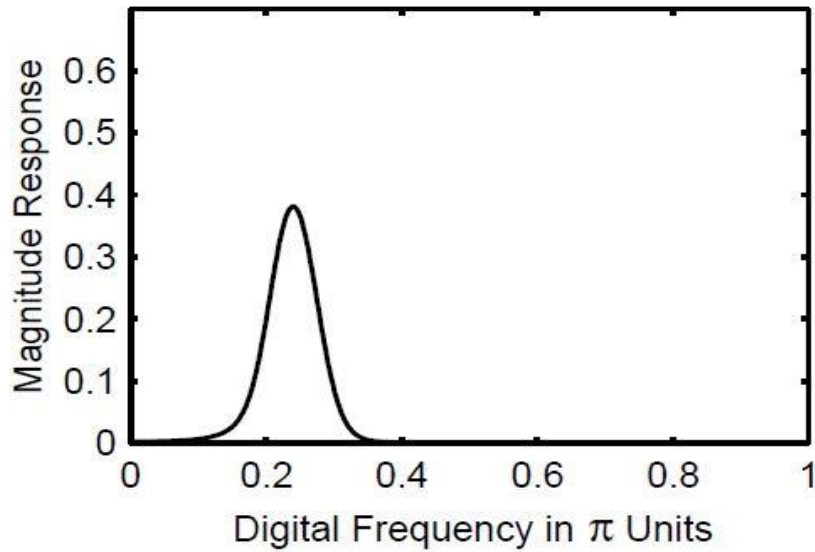
Infinite Precision (DF)



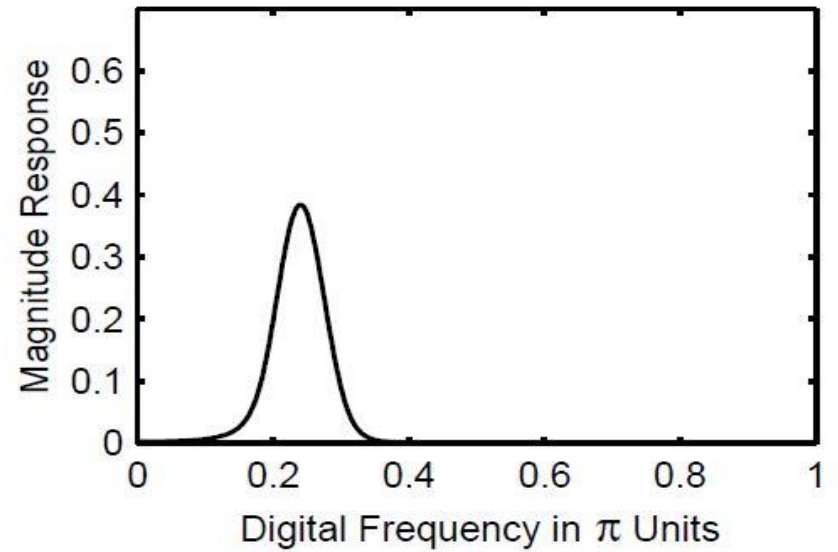
16-bit (1+6+9) Precision (DF)



16-bit (1+1+14) Precision (CF)



11-bit (1+1+9) Precision (CF)

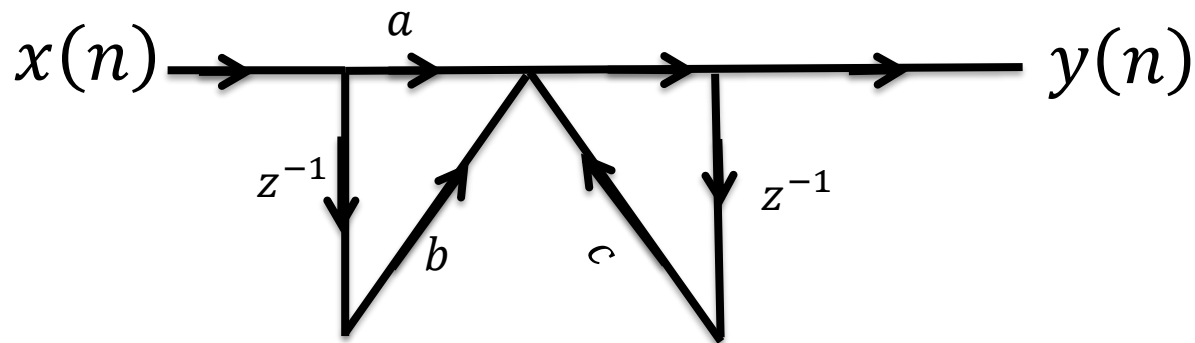


❖ Analyse: Modèle Linéaire

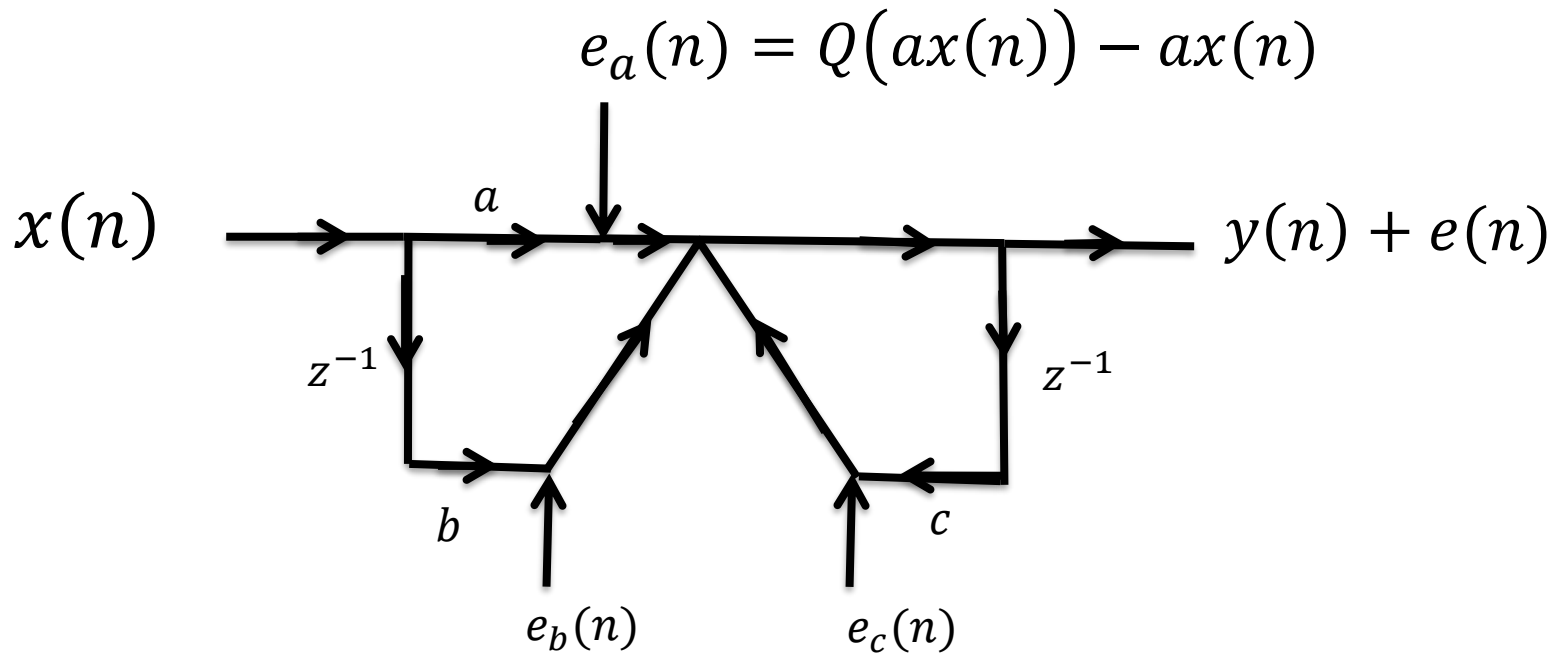
✓ Soit $y(n) = ax(n) + bx(n - 1) + cy(n - 1)$

$$H(z) = \frac{a + bz^{-1}}{1 - cz^{-1}}$$

✓ Forme directe

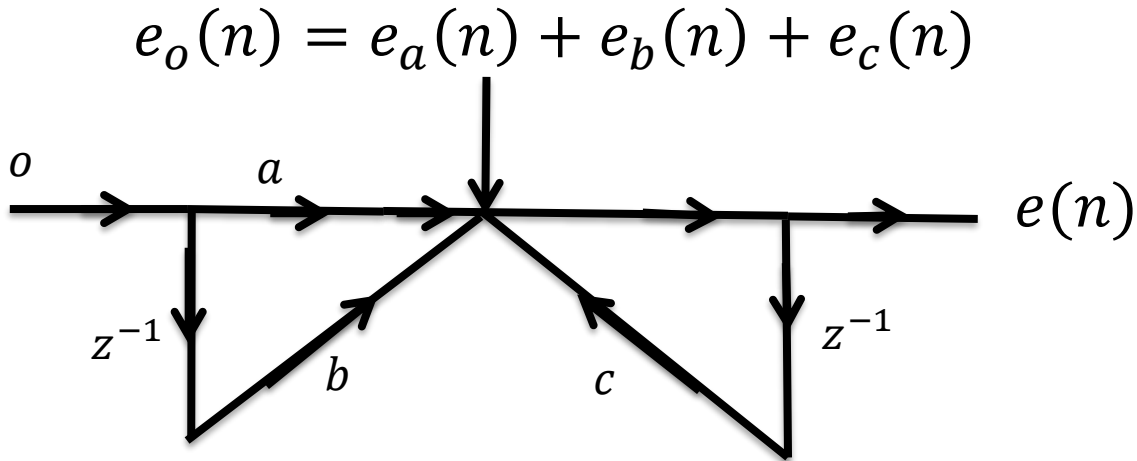


❖ Réalisation avec précision finie:



➤ Hypothèses:

1. Indépendance entre $x(n)$ et $e_i(n)$, $i = a, b, c$
2. Indépendance entre les $e_i(n)$
3. Indépendance entre $e_i(n)$ et $e_i(n + k)$ et distribution uniforme



$$\overline{e_o(n)} = \overline{e_a(n)} + \overline{e_b(n)} + \overline{e_c(n)}$$

$$e_o^2(n) = e_a^2(n) + e_b^2(n) + e_c^2(n)$$

➤ D'autre part:

$$e(n) = e_o(n) + ce(n-1)$$

$$E(z) = E_o(z) + cE(z)z^{-1}$$

$$E(z) = H_2(z)E_o(z),$$

$$e(n) = h_2(n) * e_o(n),$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - cz^{-1}}$$

$$h_2(n) = c^n \mathbf{1}(n)$$

Moyenne

$$\overline{e(n)} = \overline{e_o(n)} H_2(e^{j\omega})$$

ou

$$\overline{e(n)} = \overline{e_o(n)} \sum_{k=0}^{\infty} h_2(k)$$

$$\overline{e(n)} = \overline{e_o(n)} \frac{1}{1 - c}$$

Puissance

$$\overline{e_o^2(n)} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} h_2(k) e_o(n-k) \sum_{l=0}^{\infty} h_2(l) e_o(n-l)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h_2(k) h_2(l) \overline{e_o(n-k) e_o(n-l)}$$

$$\overline{e_o^2(n)} \delta(k-l)$$

$$= \overline{e_o^2(n)} \sum_{k=0}^{\infty} h_2^2(k)$$

$$= \overline{e_o^2(n)} \sum_{k=0}^{\infty} c^{2k} = \overline{e_o^2(n)} \frac{1}{1 - c^2}$$