Traitement Numérique Des Signaux
ELE6705

Solution du devoir #2

Problème #1

Algorithme à appliquer (exemple):

$$y(n) = x(n) - ax(n-1) + 2ay(n-1) - y(n-2)$$

Où $a = \cos(\omega_0)$, ω_0 étant la fréquence angulaire (Numérique) de la séquence à produire.

Problème #2

a)

$$H(z) = \frac{(1+z^{-1})}{6}\frac{(1+z^{-1})}{\left(1+jz^{-1}3^{-\frac{1}{2}}\right)}\frac{(1+z^{-1})}{\left(1-jz^{-1}3^{-\frac{1}{2}}\right)}$$

b)

$$H(z) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2z^{-1}} - \frac{8}{(6+2z^{-2})}$$

Problème #3

a)

$y(n) = a_0x(n) + a_1x(n-1) + a_2x(n-2) + a_3x(n-3) + a_4x(n-4) + a_5x(n-5) + a_6x(n-6);$

b)

$$y(n) = a_0\big(x(n) + x(n-6)\big) + a_1\big(x(n-1) + x(n-5)\big) + a_2\big(x(n-2) + x(n-4)\big) + a_3x(n-3)$$

c)

$$h(n) = A\big(1(n) - 1(n-7)\big);$$
$$H(z) = \frac{A(1-z^{-7})}{(1-z^{-1})}$$
$$y(n) = A\big(x(n) - Ax(n-7)\big) + y(n-1)$$

D'où :

$$b = A, \;\; c = -A \; et \; d = 1$$

Problème #4

$$y(n) = ax(n) + bx(n-1) + cx(n-2)$$

$$Y\big(e^{j\omega}\big) = X\big(e^{j\omega}\big)H\big(e^{j\omega}\big), avec\ H\big(e^{j\omega}\big) = a + be^{-j\omega} \ + ce^{-2j\omega}$$

Il faut que $H\big(e^{j\omega}\big)_{\omega=0} = 1 \;\; et \;\; H\big(e^{j\omega}\big)_{\omega=2\pi 60/1000} = 0$

D'où :

$$a = 7.14, \;\; b = -13.28 \; et \; c = 7.14$$

Problème #5

a)

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_n X_a\left(\frac{\omega}{2\pi T} - \frac{n}{T}\right), avec\ T = \frac{1}{1000}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_n \left[2\delta\left(\frac{\omega}{2\pi T} - \frac{n}{T} - 100\right) + 2\delta\left(\frac{\omega}{2\pi T} - \frac{n}{T} + 100\right) + \delta\left(\frac{\omega}{2\pi T} - \frac{n}{T} - 400\right) + \delta\left(\frac{\omega}{2\pi T} - \frac{n}{T} + 400\right) + \delta\left(\frac{\omega}{2\pi T} - \frac{n}{T} - 600\right) + \delta\left(\frac{\omega}{2\pi T} - \frac{n}{T} + 600\right)\right]$$

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi\sum_n [2\delta(\omega - 2\pi n - 0.2\pi) + 2\delta(\omega - 2\pi n + 0.2\pi) + \delta(\omega - 2\pi n - 0.8\pi) + \delta(\omega - 2\pi n + 0.8\pi) + \delta(\omega - 2\pi n - 1.2\pi) + \delta(\omega - 2\pi n + 1.2\pi)]$$

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi\sum_n [2\delta(\omega - 2\pi n - 0.2\pi) + 2\delta(\omega - 2\pi n + 0.2\pi) + 2\delta(\omega - 2\pi n - 0.8\pi) + 2\delta(\omega - 2\pi n + 0.8\pi)]$$

b)

Cette situation correspond à un échantillonnage à un taux de $500Hz$.

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_n X_a\left(\frac{\omega}{2\pi T} - \frac{n}{T}\right), avec\ T = \frac{1}{500}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_n \left[2\delta\left(\frac{\omega}{2\pi T} - \frac{n}{T} - 100\right) + 2\delta\left(\frac{\omega}{2\pi T} - \frac{n}{T} + 100\right) + \delta\left(\frac{\omega}{2\pi T} - \frac{n}{T} - 400\right) + \delta\left(\frac{\omega}{2\pi T} - \frac{n}{T} + 400\right) + \delta\left(\frac{\omega}{2\pi T} - \frac{n}{T} - 600\right) + \delta\left(\frac{\omega}{2\pi T} - \frac{n}{T} + 600\right)\right]$$

$$Y(e^{j\omega}) = 2\pi\sum_n [2\delta(\omega - 2\pi n - 0.4\pi) + 2\delta(\omega - 2\pi n + 0.4\pi) + \delta(\omega - 2\pi n - 1.6\pi) + \delta(\omega - 2\pi n + 1.6\pi) + \delta(\omega - 2\pi n - 2.4\pi) + \delta(\omega - 2\pi n + 2.4\pi)]$$

$$Y(e^{j\omega}) = 2\pi\sum_n [4\delta(\omega - 2\pi n - 0.4\pi) + 4\delta(\omega - 2\pi n + 0.4\pi)]$$

c)

On peut écrire $v(n) = x(n)\frac{1}{2}(1 + \cos(\pi n))$

Cela implique $V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega}) * TF\left\{\frac{1}{2}(1 + \cos(\pi n))\right\}$

Ou bien $V(e^{j\omega}) = \sum_{n\,paires} x(n)\, e^{-j\omega n}$

Soit $n = 2k, V(e^{j\omega}) = \sum_k x(2k)\, e^{-j\omega 2k}$

$V(e^{j\omega}) = \sum_k y(k)\, e^{-j\omega 2k}$ où la séquence $y(n)$ est celle de numéro « «b »

$$V(e^{j\omega}) = Y(e^{2j\omega}) = 2\pi \sum_n [4\delta(2\omega - 2\pi n - 0.4\pi) + 4\delta(2\omega - 2\pi n + 0.4\pi)]$$

$$V(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_n [2\delta(\omega - \pi n - 0.2\pi) + 2\delta(\omega - \pi n + 0.2\pi)]$$

$$V(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_n [2\delta(\omega - 2\pi n - 0.2\pi) + 2\delta(\omega - 2\pi n + 0.2\pi) + 2\delta(\omega - 2\pi n - 0.8\pi) + 2\delta(\omega - 2\pi n + 0.8\pi)]$$

Note : On remarque que $V(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})$; c'est un hasard, il ne faut pas généraliser!

d)

$$S(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega}) \Big| Filtre\ pass - bas \text{ à } \omega = \frac{\pi}{2}, Gain = 2$$

$$S(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_n [2\delta(2\omega - 2\pi n - 0.2\pi) + 2\delta(2\omega - 2\pi n + 0.2\pi) + 2\delta(2\omega - 2\pi n - 0.8\pi) + 2\delta(2\omega - 2\pi n + 0.8\pi)] \Big| \Big| Filtre\ pass - bas \text{ à } \omega = \frac{\pi}{2}, Gain = 2$$

$$S(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_n [\delta(\omega - \pi n - 0.1\pi) + \delta(\omega - \pi n + 0.1\pi) + \delta(\omega - \pi n - 0.4\pi) + \delta(\omega - \pi n + 0.4\pi)] \Big| \Big| Filtre\ pass - bas \text{ à } \omega = \frac{\pi}{2}, Gain = 2$$

$$S(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_n [2\delta(\omega - 2\pi n - 0.1\pi) + 2\delta(\omega - 2\pi n + 0.1\pi) + 2\delta(\omega - 2\pi n - 0.4\pi) + 2\delta(\omega - 2\pi n + 0.4\pi)]$$

Pour une séquence obtenue par l'échantillonnage de $X_a(t)$ à un taux de $2kH$, nous aurions :

$$2\pi \sum_n [2\delta(\omega - 2\pi n - 0.1\pi) + 2\delta(\omega - 2\pi n + 0.1\pi) + 1\delta(\omega - 2\pi n - 0.4\pi) + 1\delta(\omega - 2\pi n + 0.4\pi) + 1\delta(\omega - 2\pi n - 0.6\pi) + 1\delta(\omega - 2\pi n + 0.6\pi)]$$