POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

ELE 6705
Traitement numérique des signaux

Hassan Bensalah

Chap. III : Analyse de Fourier

Sujets abordés

- Transformée de Fourier d’une séquence
- Transformée Discrète de Fourier
- Transformée Rapide de Fourier
- Transformée Discrète de Fourier à court terme

Transformée de Fourier d’une séquence

- La transformée de Fourier consiste à l’analyse fréquentielle de signaux discrets.
- Étude de la réponse en fréquence d’un système discret

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

- $x(n) = e^{jwn}$
- $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{jw(n-k)}$$

$$= e^{jwn} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-jwk}$$

$$TF\{h(n)\} = H(e^{iw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) e^{-jwn}$$

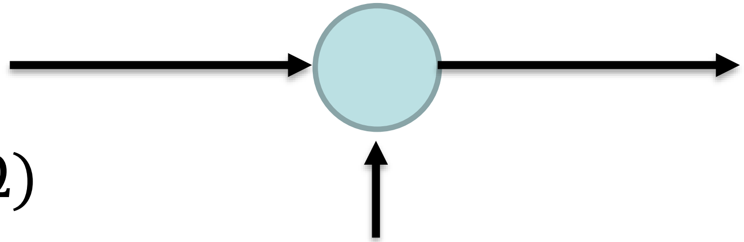
$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} H(e^{jw}) e^{jwn} \, dw$$

Remarque: $H(e^{jw}) = H(z)\Big|_{\substack{z = e^{jw} \\ (r=1)}}$

Relation avec la TF. d'un signal

$x_a(t)$

$X_a(\Omega)$



$$x_e(t) = \sum_n x_a(nT)\delta(t - nT)$$

$X_e(\Omega)$

$$\sum_n \delta(t - nT)$$

$$\frac{2\pi}{T}\sum_n \delta(\Omega - \frac{2\pi n}{T})$$

$$X_e(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_a(\Omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_n \delta(\Omega - \frac{2\pi n}{T})$$

$$= \frac{1}{T} X_a(\Omega) * \sum_n \delta(\Omega - \frac{2\pi n}{T})$$

$$= \frac{1}{T} \sum_n X_a\,(\Omega - \frac{2\pi n}{T})$$

- Utilisant la TF d'un signal échantillonné: $x_e(t)$

$$X_e(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT)\delta(t - nT)\, e^{-j\Omega t}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\Omega nT}$$

Ω Fréquence angulaire par seconde(analogique)

w Fréquence angulaire (discret)

soit $\quad \Omega = \frac{w}{T}$

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-jwn}$$

$$X(e^{jw}) = \frac{1}{T}\sum_{n} X_a\left(\frac{w}{T} - \frac{2\pi n}{T}\right)$$

Exemple. I: $x_a(t) = k$

$$X\left(e^{jw}\right) ?$$

$$x(n) = k$$

Inverse de TF. Nous donne:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} X(e^{jw})e^{jwn}\,dw$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \left(X_R(e^{jw}) + jX_I(e^{jw})\right)e^{jwn}\,dw$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(X_R\left(e^{jw}\right) + jX_I\left(e^{jw}\right)\right)(\cos(wn) + j\sin(wn))\,dw$$

$x(n)$ est réel. On garde alors juste la partie réelle

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(X_R\left(e^{jw}\right)\cos(wn) - X_I\left(e^{jw}\right)\sin(wn)\right)dw$$

$x(-n) = x(n)$. La parité

$$X_R\left(e^{jw}\right) = x(0) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} x(n)\cos(wn)\,; \quad X_I\left(e^{jw}\right) = 0$$

$$X\left(e^{jw}\right) = x(0) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} x(n)\cos(wn)$$

$$= k + 2\sum_{n=1}^{+\infty} k\cos(wn) = 2k\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(wn)\right)$$

$$= 2k \lim_{N\to\infty} \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)w}{2\sin\left(\frac{w}{2}\right)}$$

$$= 2\pi k \sum_{n} \delta(w - 2\pi n)$$

Application de la formule suivante:

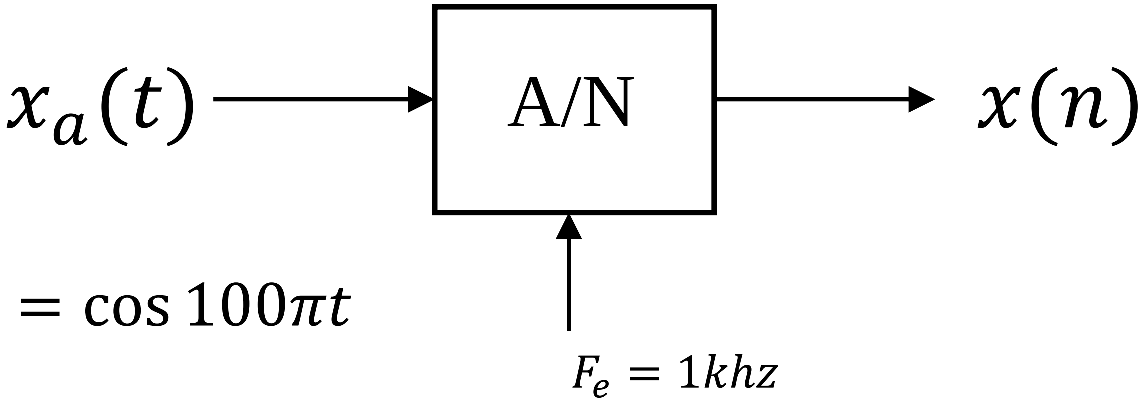
$$X\left(e^{jw}\right) = \frac{1}{T}\sum_{n} X_a\,(\frac{w}{T} - \frac{2\pi n}{T})$$

Cherchons $X_a(\Omega)$ D'après le tableau de La T.F

$$X_a(\Omega) = \mathrm{TF}\left(x_a(t)\right) = TF(k) = 2\pi k\ \delta(\Omega)$$

$$X\left(e^{jw}\right) = \frac{1}{T}\sum_{n} 2\pi k\delta(\frac{w}{T} - \frac{2\pi n}{T})$$

Exemple. II:



$$x_a(t) = \cos 100\pi t$$

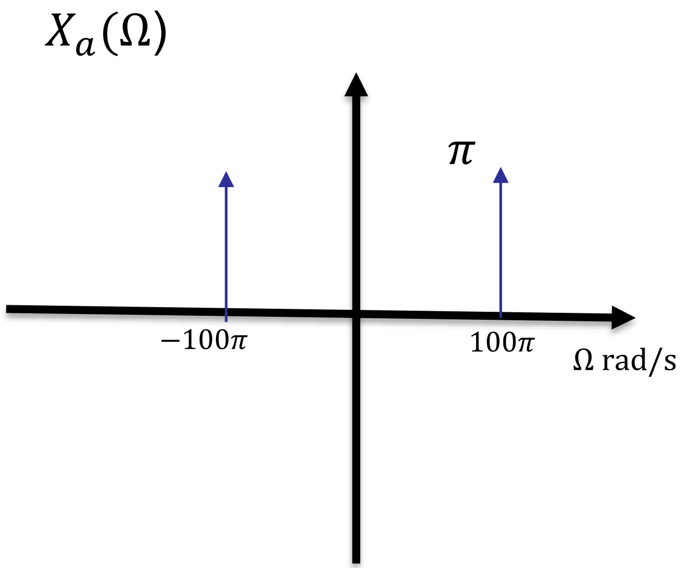
Analysons le spectre à la sortie de convertisseur $X(e^{jw})$?

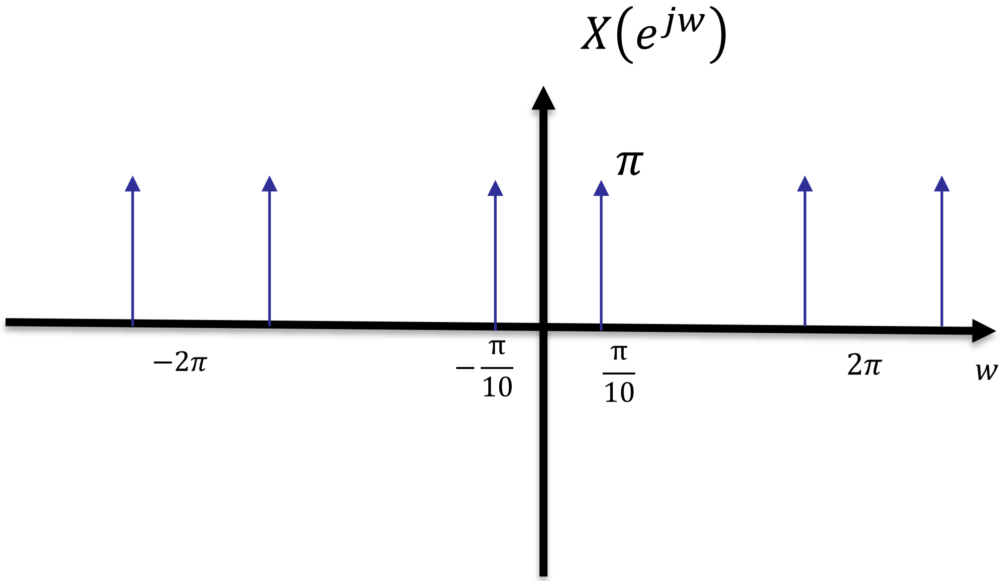
$$X_a(\Omega) = \mathrm{TF}(\cos 100\pi t) = \pi\delta(\Omega - 100\pi) + \pi\delta(\Omega + 100\pi)$$

$$X(e^{jw}) = \frac{1}{T}\sum_{n}\left(\pi\delta\left(\frac{w}{T} - \frac{2\pi n}{T} - 100\pi\right) + \pi\delta\left(\frac{w}{T} - \frac{2\pi n}{T} + 100\pi\right)\right)$$

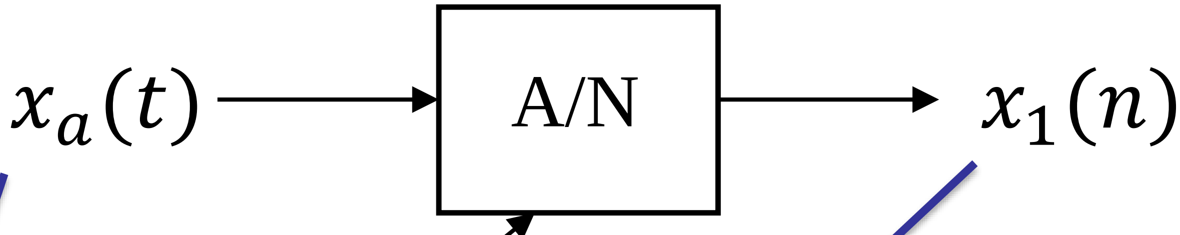
Appliquons la relation suivante: $\delta(Tw) = \frac{1}{|T|}\delta(w)$

$$X(e^{jw}) = \pi \sum_n \left(\delta\left(w - \frac{\pi}{10} - 2\pi n\right) + \pi\delta\left(w + \frac{\pi}{10} - 2\pi n\right)\right)$$

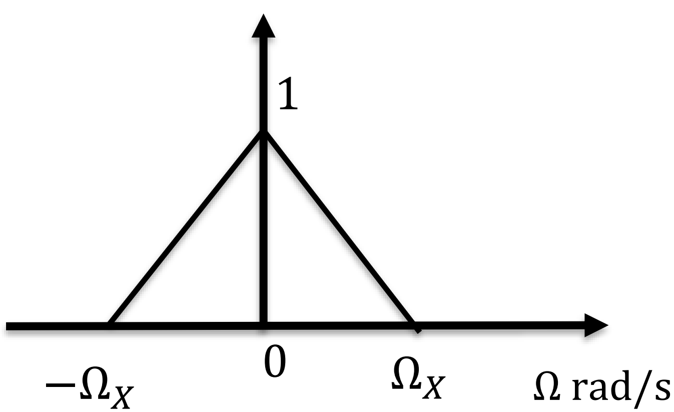


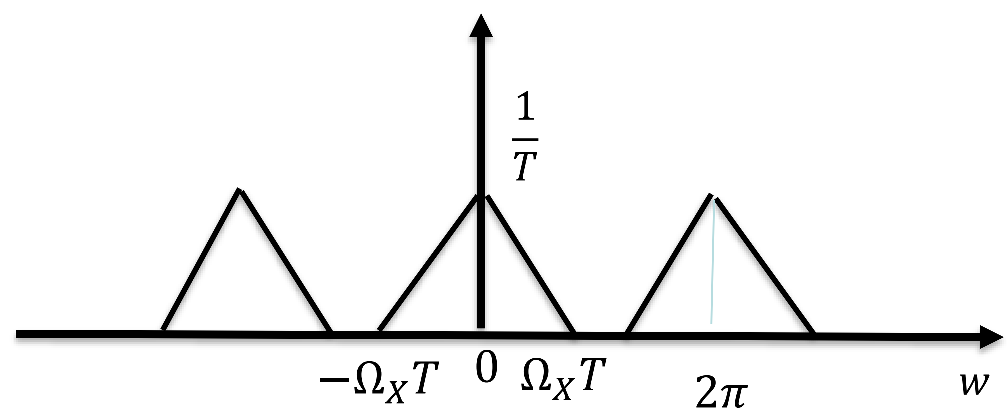


Problème : Interpolation



$X_a(\Omega)$ $\quad F_e = 1/T \quad$ $X_1(e^{jw}) = \frac{1}{T}\sum_n X_a\left(\frac{w}{T} - \frac{2\pi n}{T}\right)$





- avec $\Omega = \frac{w}{T}$

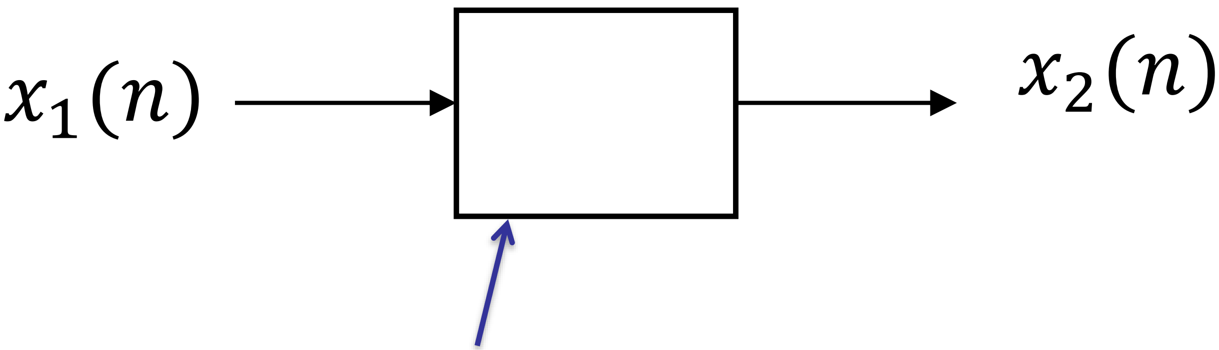
Remarque:

- Transformation de Fourier: S'applique aux signaux continus apériodique, produit un spectre apériodique;

  - Transformation de Fourier à temps discret: S'applique aux signaux discrets apériodique, produit un spectre continu périodique. $X\left(e^{jw}\right)$ est périodique de 2π.

Question: Quelle est l'information à $\frac{T}{2}$

- Cherchons $X_2\left(e^{jw}\right)$



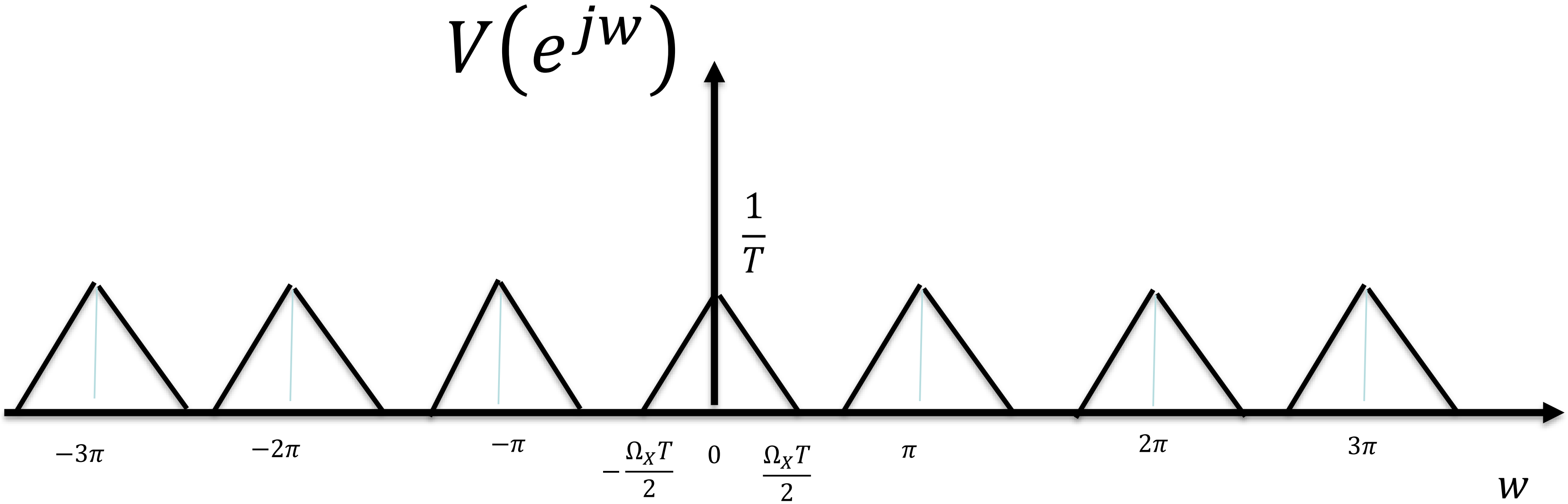
Algorithme d'interpolation?

- Soit $v(n) = \begin{cases} x_1\left(\frac{n}{2}\right), & n \ pair \\ 0, & n \ impair \end{cases}$

$$V\left(e^{jw}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v(n)e^{-jwn} = \sum_{n\,pair} x_1\left(\frac{n}{2}\right)e^{-jwn}$$

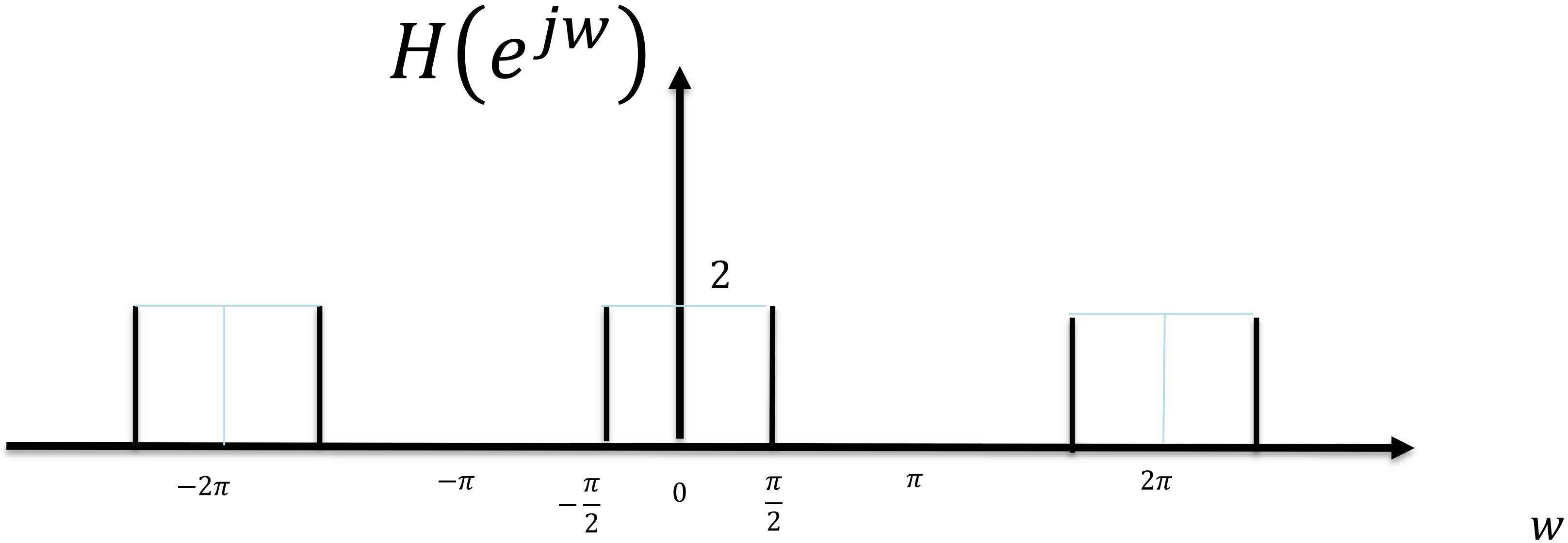
- Posons $l = \frac{n}{2}$

$$V\left(e^{jw}\right) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_1(l)e^{-j2wl} = X_1\left(e^{jw}\right)\Big|w \rightarrow 2w$$



Pour obtenir $X_2(e^{jw})$ Il faut filtrer $V(e^{jw})$ avec

$$H(e^{jw}) = \begin{cases} 2, & |w| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$



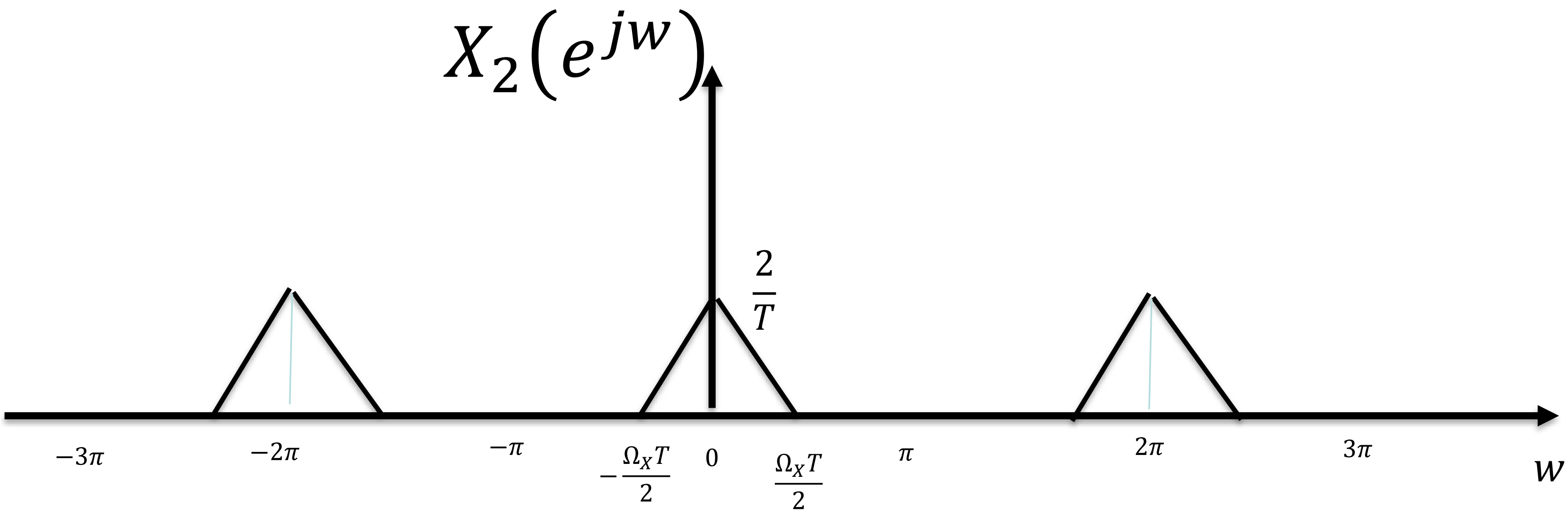
$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} H(e^{jw}) e^{jwn}\, dw = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}$$

$$= S_a\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$x_2(n) = v(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(k) S_a\left(\frac{(n-k)\pi}{2}\right)$$

$$x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(l) S_a\left(\frac{(n-2l)\pi}{2}\right)$$

$$X_2\left(e^{jw}\right) = \frac{2}{T}\sum_n X_a\left(\frac{2w}{T} - \frac{4\pi n}{T}\right)$$



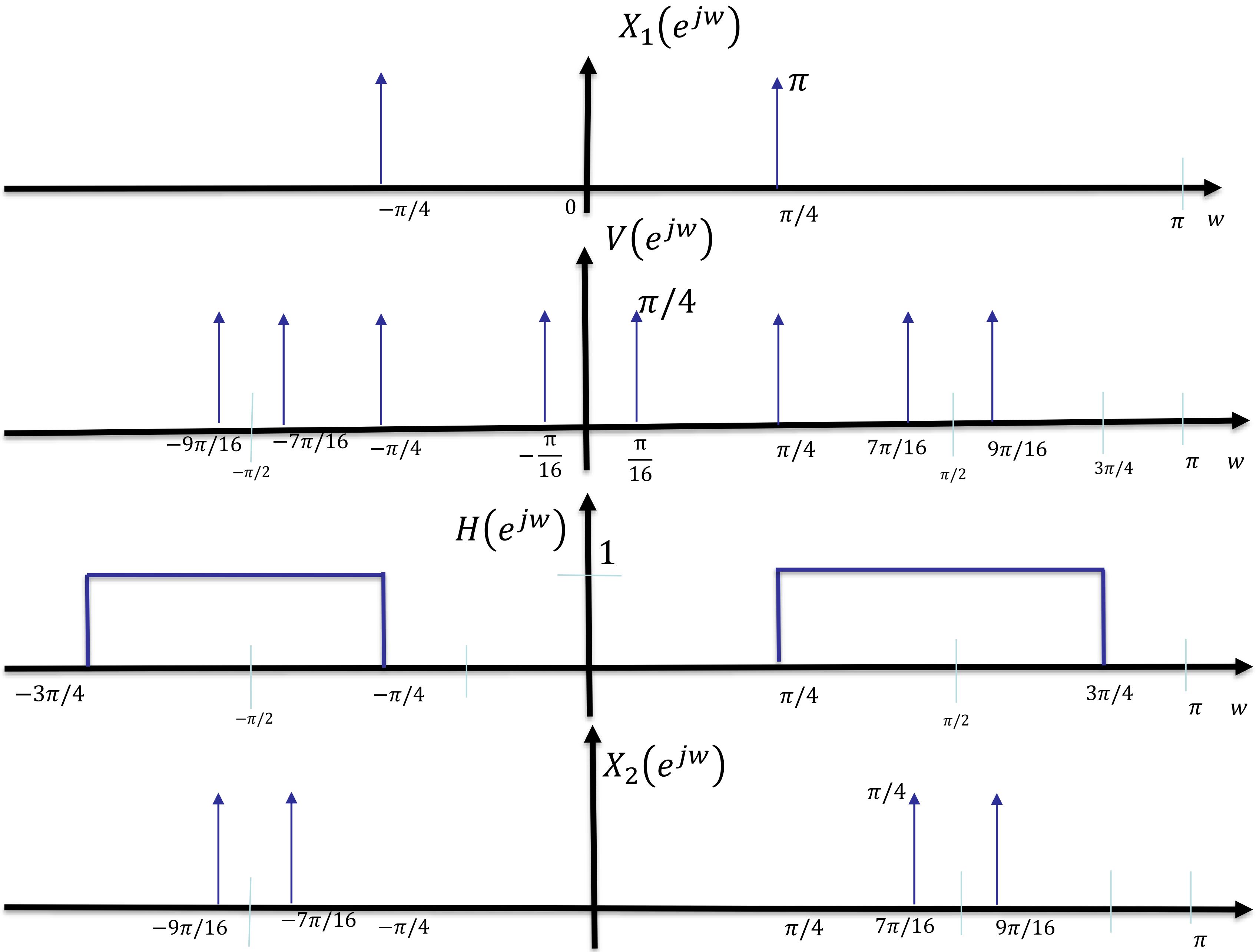
Exemple:

- Soit la séquence $x_1(n)$ obtenue à partir d'une sinusoïdale $x_a(t) = \cos 5000\pi t$.
- La fréquence d'échantillonnage est $F_e = 1/T$
- L'entrée $v(n)$ du filtre $H(e^{jw})$ est donné par:

$$H(e^{jw}) = \begin{cases} 1, \frac{\pi}{4} < |w| < \frac{3\pi}{4} \\ 0, \quad ailleurs \end{cases}$$

- Soit la séquence $v(n)$ est donnée par:

$$v(n) = \begin{cases} x_1\left(\frac{n}{4}\right), & n \ multiple \ de \ 4 \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$



$X_1(e^{jw})$
π
$-\pi/4$
0
$\pi/4$
π
w
$V(e^{jw})$
$\pi/4$
$-9\pi/16$
$-7\pi/16$
$-\pi/4$
$-\frac{\pi}{16}$
$\frac{\pi}{16}$
$\pi/4$
$7\pi/16$
$9\pi/16$
$-\pi/2$
$\pi/2$
$3\pi/4$
π
w
$H(e^{jw})$
1
$-3\pi/4$
$-\pi/4$
$\pi/4$
$3\pi/4$
$-\pi/2$
$\pi/2$
π
w
$X_2(e^{jw})$
$\pi/4$
$-9\pi/16$
$-7\pi/16$
$-\pi/4$
$\pi/4$
$7\pi/16$
$9\pi/16$
π

Principales Propriétés:

- Linéarité

$$ax(n) + by(n) \longleftrightarrow aX\left(e^{jw}\right) + bY\left(e^{jw}\right)$$

- Décalage

$$x(n - N) \longleftrightarrow e^{-jwN}X\left(e^{jw}\right)$$

- Convolution de séquences

$$x(n) * y(n) \longleftrightarrow X\left(e^{jw}\right)Y\left(e^{jw}\right)$$

- Produit de séquences

$$x(n)y(n) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}X\left(e^{jw}\right) * Y\left(e^{jw}\right)$$

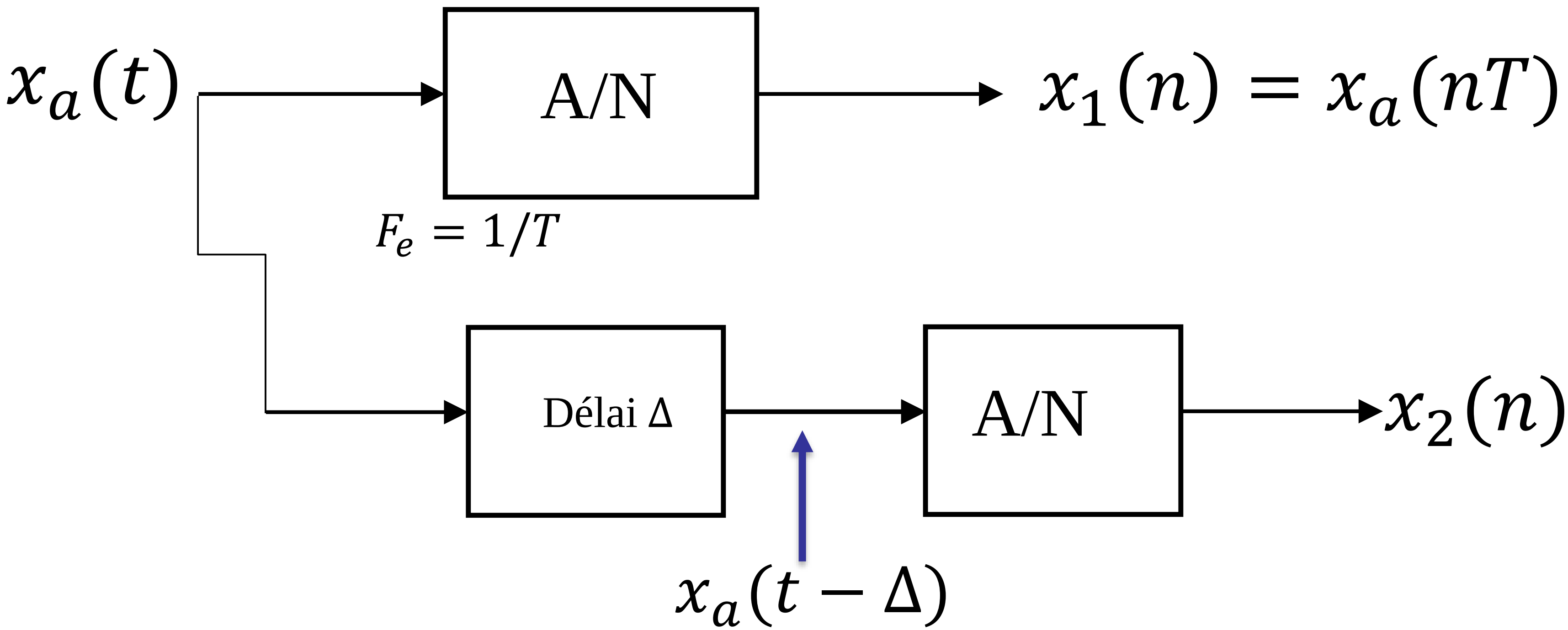
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X\left(e^{j\theta}\right)Y\left(e^{j\theta}\right)$$

- Séquence réelle

$$X\left(e^{-jw}\right) = \sum_n x(n)e^{+jw} = X^*\left(e^{jw}\right)$$

$$\left|X\left(e^{-jw}\right)\right| = \left|X\left(e^{jw}\right)\right|; \arg(X\left(e^{-jw}\right) = \arg(X\left(e^{jw}\right)$$

Problème: Décalage non entier d'une séquence



$$x_2(n) = x_a(nT - \Delta)$$

- SI $\Delta = kT$; $x_2(n) = x_a(n-k)$

$X_1\left(e^{jw}\right)$ vs $X_a(\Omega)$: $X_1\left(e^{jw}\right) = \frac{1}{T}\sum_n X_a\left(\frac{w}{T} - \frac{2\pi n}{T}\right)$

$X_2\left(e^{jw}\right)$ vs $X_a(\Omega)$: $X_e(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_a(\Omega) e^{-j\Omega\Delta} * \frac{2\pi}{T}\sum_n \delta(\Omega - \frac{2\pi n}{T})$

$$= \frac{1}{T}\sum_n X_a\left(\Omega - \frac{2\pi n}{T}\right) e^{-j\Delta(\Omega - \frac{2\pi n}{T})}$$

D'autre part

$$X_e(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT - \Delta)\delta(t - nT)\, e^{-j\Omega t}\, dt \quad = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT - \Delta) e^{-j\Omega nT}$$

$$= \sum_n x_2(n) e^{-j\Omega nT}$$

$$X_2\left(e^{jw}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(n)e^{-jwn} = X_e(\Omega)\Big|_{\Omega = \frac{w}{T}}$$

$$X_2\left(e^{jw}\right) = \frac{1}{T}\sum_n X_a\left(\frac{w}{T} - \frac{2\pi n}{T}\right)e^{-j\frac{\Delta}{T}(w-2\pi n)}$$

Transformée Discrète de Fourier (TDF)

Problématique:

- La transformée de Fourier, TF, des signaux en temps discrets est une fonction continue de ω; ce n'est pas une représentation discrète;

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

- Le calcul de la TF nécessite une infinité de points de mesures $x(n)$ (pas toujours possible dans la pratique : contraintes temps réel, etc.)

Solution: Transformée de Fourier Discrète (TDF):

- Échantillonnage de la transformée de Fourier d'une séquence (sans perdre de l'information);

- Limiter la durée de $x(n)$ i.e. considérer un nombre fini N de points temporels;

- Discrétiser la fréquence (considérer un nombre fini L de points fréquentiels);
- À un nombre fini de valeurs $x(1), \cdots, x(N)$, on fait correspondre un nombre fini de valeurs $X\left(e^{j\omega_1}\right), \cdots, x\left(e^{j\omega_L}\right)$ telle que la TDF de $x(n)$ soit une approximation aussi bonne que possible de $X\left(e^{j\omega}\right)$.

- La Transformée de Z d'une séquence $x(n)$ de N points telle que:

- $x(n) = \begin{cases} Non\, nulle, \ 0 < n < N-1 \\ 0, ailleurs \end{cases}$ est définie

par:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

- Pour un $z = e^{j\omega}$, On s'intéresse à un cercle unitaire

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n}$$

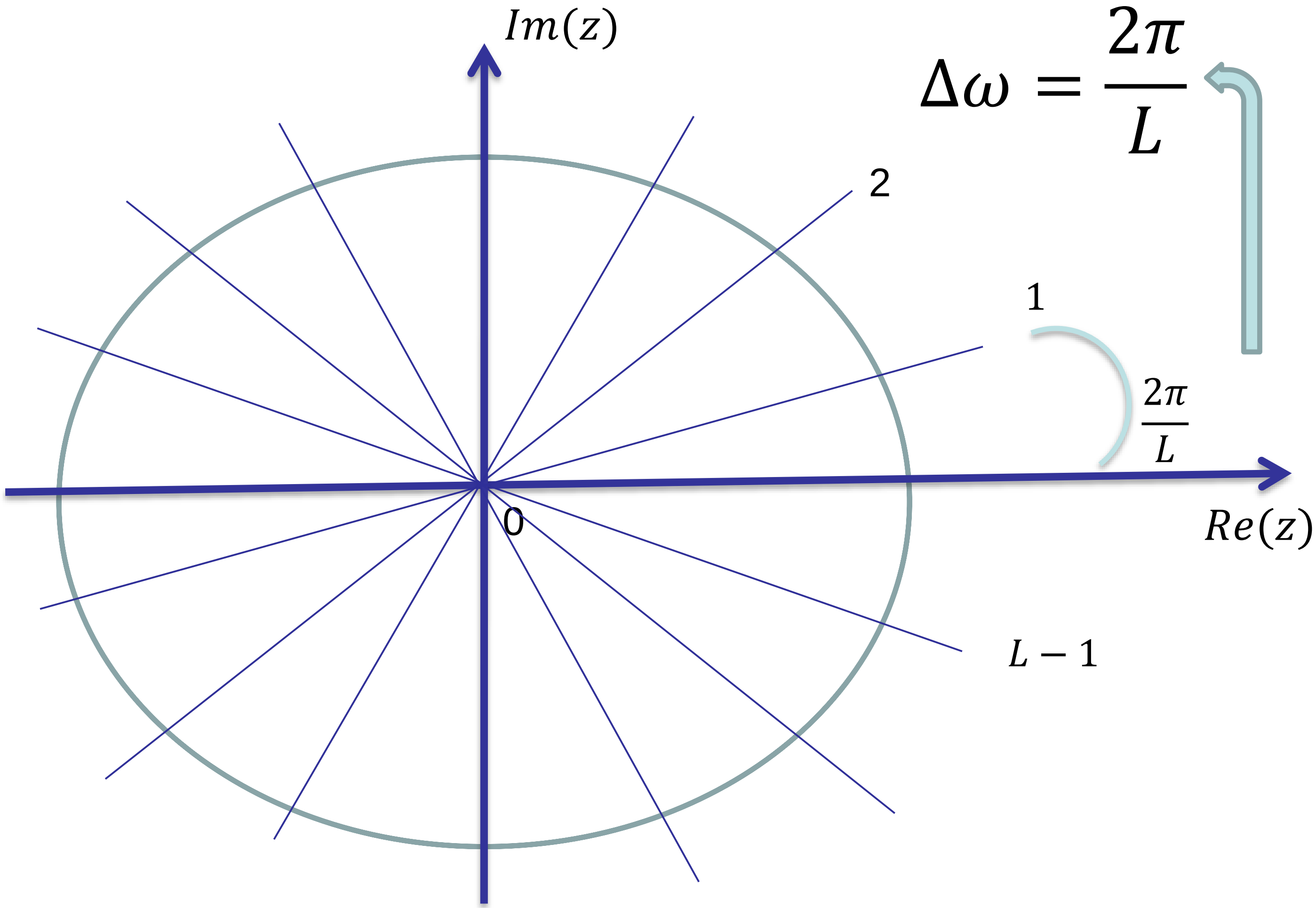
- $X(e^{j\omega})$ est périodique de période 2π;

- Limité la durée du signal $x(n)$ revient à considérer un nombre fini de N points temporels

$$x(n) = \{x(0), \cdots, x(N-1)\}$$

- Discrétisé la fréquence revient à considérer un nombre fini L de points fréquentiels

$$\{X(e^{j\omega_1}), \cdots, X(e^{j\omega_L})\}$$


$Im(z)$
$\Delta\omega = \frac{2\pi}{L}$
2
1
$\frac{2\pi}{L}$
0
$Re(z)$
$L-1$

- Intervalle d'échantillonnage $\Delta\omega = \frac{2\pi}{L}$;

- La Discrétisation de la fréquence peut être écrite sous forme:

$$\omega = (\Delta\omega)k; \text{ avec } k = 0, \cdots, L-1$$
$$= \frac{2\pi}{L}k$$

$$\text{TDF}\{x(n)\} = X(k) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega = \frac{2\pi}{L}k}$$

- La TDF évaluée sur un nombre L de points fréquentiels d'un signal discret est définie par

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi n}{L}k}$$

N : nombre de points temporels
n : variable temporelle $n = 0, \cdots N-1$
L : Nombre de points fréquentiels
k : variable fréquentielle $k = 0, \cdots L-1$

- $X(k)$ est périodique de période L:

$$X(k+L) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi n}{L}(k+L)}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi n}{L}(k+L)}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi n}{L}k} \; e^{-j\frac{2\pi n}{L}L}$$

$$= X(k)$$

- L'inverse de $X(k)$

$$\sum_{k=0}^{L-1} X(k) e^{j\frac{2\pi m}{L}k} = \sum_{k=0}^{L-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi n}{L}k} \right) e^{j\frac{2\pi m}{L}k}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left(\sum_{k=0}^{L-1} e^{-j\frac{2\pi(n-m)}{L}k} \right) (1)$$

Remarque:

$$\sum_{k=0}^{L-1} e^{-j\frac{2\pi(n-m)}{L}k} = \begin{cases} L, & si\ n-m=pL \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

avec p un entier

- L'équation (1) devient:

$$\sum_{k=0}^{L-1} X(k)e^{j\frac{2\pi m}{L}k} = \sum_{n=0}^{N-1}(x(n))L = x(m+pL)L = x(m)L$$

$$x(n) = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} X(k)e^{j\frac{2\pi n}{L}k}$$

- Dans la suite, sans perte de généralités et sauf mention contraire, on considèrera $L = N$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi n}{N}k}, n = 0, \cdots, N-1$$

- $x(n)$ est périodique de période N;
- TF d'une séquence:

Discrétisation en temporel $\Rightarrow$ Périodisation en fréquentiel

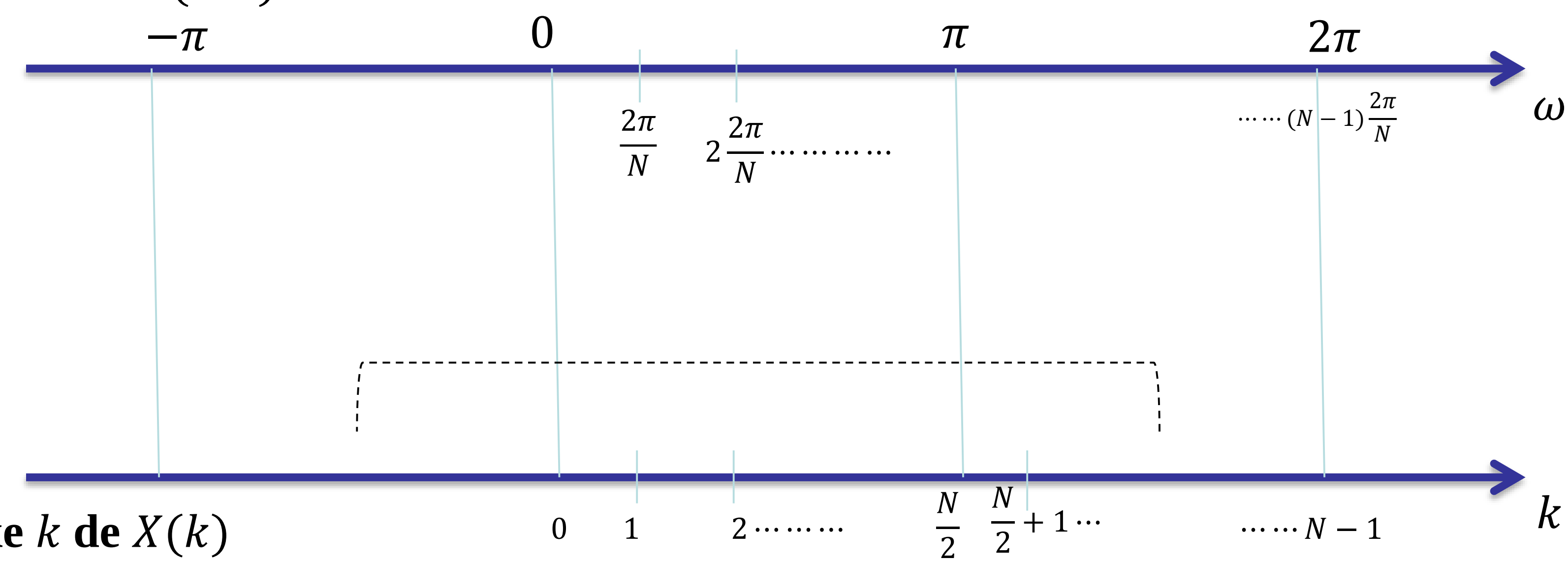
- TDF:

Discrétisation en temporel $\Rightarrow$ Périodisation en fréquentiel

• Interprétation de L'abscisse

❖ Posons $\omega_k = \frac{2\pi}{N} k$

➢ **Axe ω de $X(e^{j\omega})$**



➢ **Axe k de $X(k)$**

❑ Les points de $\frac{N}{2}+1$ à $N-1$ sont le conjugué des points de $\frac{N}{2}$ à 0

❑ Propriété de la symétrique conjugué $\quad X(k) = X^*(N-k)$

Exemple:

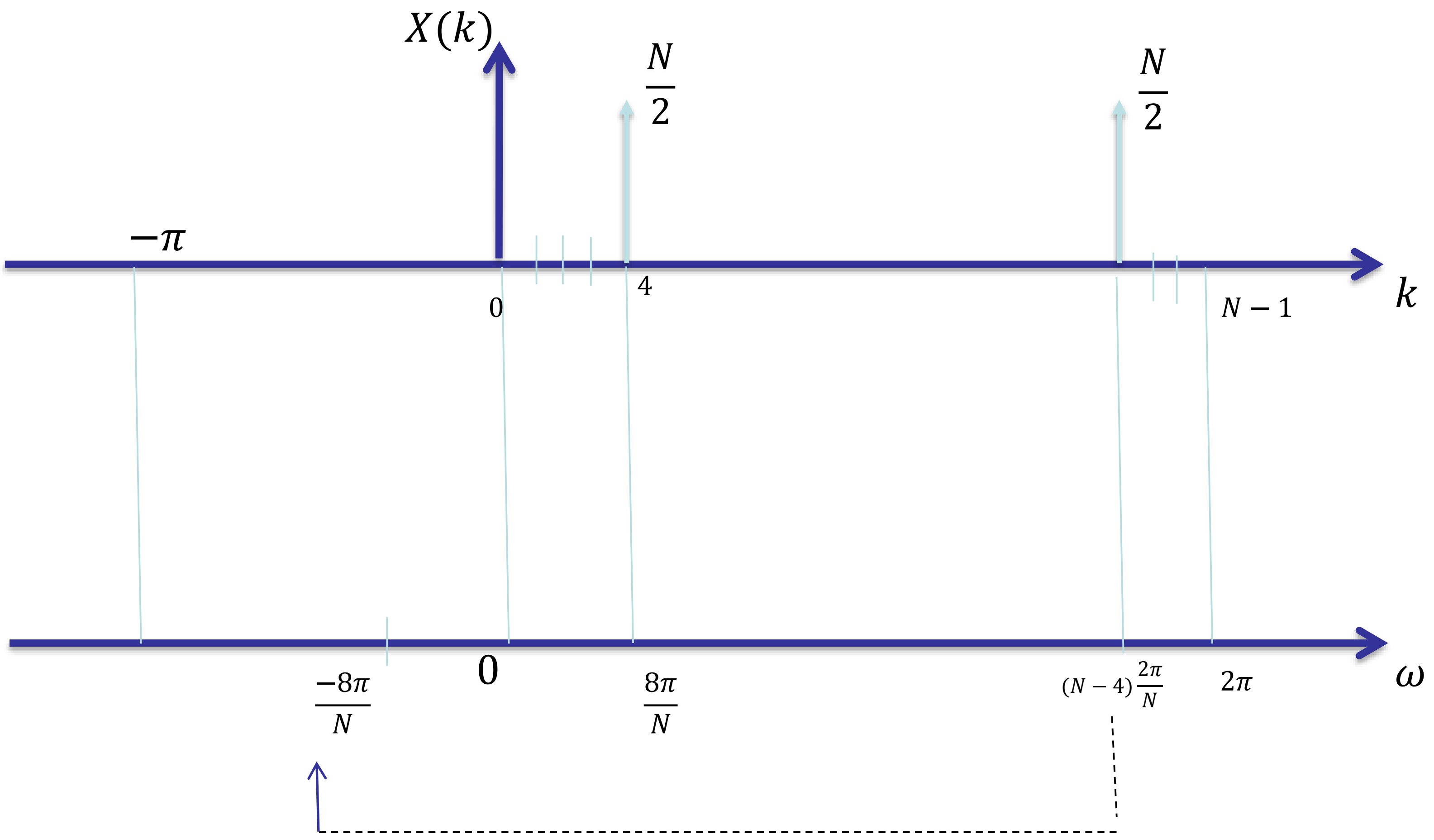
$$x(n) = \cos\frac{8\pi n}{N}, \qquad n = 0,1,\cdots,N-1$$

- La fréquence ; $\frac{8\pi}{N}$, l'intervalle contient 4 périodes sinusoïdales

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \cos\frac{8\pi n}{N} e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2}\left(e^{-j\frac{2\pi n(k-4)}{N}} + e^{-j\frac{2\pi n(k+4)}{N}}\right)$$

$$X(k) = \begin{cases} \frac{N}{2}, & k = 4, k = N-4 \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$



- Quelques propriétés

❑Quelques transformées de Fourier discrètes utiles:

❖ $Impulsion\ de\ diract\ \{1,0,\cdots 0\} \Longrightarrow \{1,1,\cdots 1\}$

❖ $La\ constante\quad \{1,1,\cdots 1\} \Longrightarrow \{N,0,\cdots 0\}$

❖ $Une\ sinusoidale\quad \cos\left(\frac{2\pi nl}{N}\right)$

$$0{,}5N(\delta(k-l)+\delta[k-(N-l)])$$

Exemple

Déterminer la Transformation discrète de Fourier *TDF*

- Soit une séquence suivante:

$$x(n) = \{1,2,1,0,1,2,1,0,1,2,1,0,1,2,1,0\}$$

- Calculer *TDF* pour une seule période d'échantillonnage

❑Multiplication en fréquence (Convolution circulaire)

➢ Soient $x(n)(X(k) = TDF(x(n)),\ y(n)(Y(k) = TDF(y(n))$et $v(n)(V(k) = TDF\big(v(n)\big)$ trois séquences telles que:

$$V(k) = X(k)Y(k)$$

➢ Par définition $v(n)$ est donnée par:

$$v(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y(k)e^{j\frac{2\pi n}{N}k}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{l=0}^{N-1} x(l)e^{-j\frac{2\pi l}{N}k}\sum_{r=0}^{N-1} y(r)e^{-j\frac{2\pi r}{N}k}\right)e^{j\frac{2\pi n}{N}k}$$

$$v(n) = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} x(l) \sum_{r=0}^{N-1} y(r) \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi(n-l-r)}{N}k}}_{= N}$$

- Si $n - l - r = mN$ $\Rightarrow$ $r = (n-l) \bmod N$

$$v(n) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l)(y(n-l) mod\ N)$$

$$= x(n) \; \textcircled{\scriptsize N} \; y(n)$$

- Multiplication de séquence (Convolution circulaire)
  - Avec $v(n) = x(n)y(n)$

$$V(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n)e^{-j\frac{2\pi n}{N}k}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X(l)e^{j\frac{2\pi n}{N}l} \qquad \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} Y(r)e^{j\frac{2\pi n}{N}r}$$

$$V(k) = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X(l)(Y(k-l)mod\ N)$$

$$= \frac{1}{N}X(k) \; N \; Y(k)$$

- Linéarité:

$$ax(n) + \mathrm{by(n)} \Longrightarrow aX(k) + \mathrm{bY(k)}$$

- Décalage temporel(retard):

$$x_\Delta(n) \Longrightarrow X(k)e^{-j\frac{2\pi k}{N}\Delta}$$

  - Rappel $x(n-\Delta) \Longrightarrow e^{-jw\Delta}X(e^{jw})$

- $x_\Delta(n)\ vs\ \ x(n)$?

$$x_\Delta(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(X(k)e^{-j\frac{2\pi k}{N}\Delta}\right)e^{j\frac{2\pi n}{N}k}, \mathrm{n} = 0,1,\cdots N-1$$

$$\boldsymbol{\sum_{l=0}^{N-1} x(l)e^{-j\frac{2\pi lk}{N}}}$$

$$\boldsymbol{= \begin{cases} N, & n-\Delta-l = rN \\ 0, & ailleurs \end{cases}}$$

$$x_\Delta(n) = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} x(l)\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi k}{N}(n-\Delta-l)}$$

$$\boldsymbol{l = n-\Delta-rN}$$

$$\boxed{\boldsymbol{l = (n-\Delta) mod\ N}}$$

$$x_\Delta(n) = x\big((n-\Delta)\ mod\ N\big)$$

Convolution Circulaire (Périodique)

- La convolution linéaire(normal) de deux signaux qui sont tous les deux périodiques n’existe pas;

- On doit appeler de la convolution circulaire ou périodique;

- Si $x(n)$ et $y(n)$ sont tous deux périodiques avec la même période N, alors leur convolution circulaire produira une séquence $s(n)$ qui est périodique aussi, ayant la même période N;

- La technique de « *zéro-padding* » nous permet de calculer la convolution des séquences apériodique (convolution linéaire) en utilisant TDF.

Exemple:

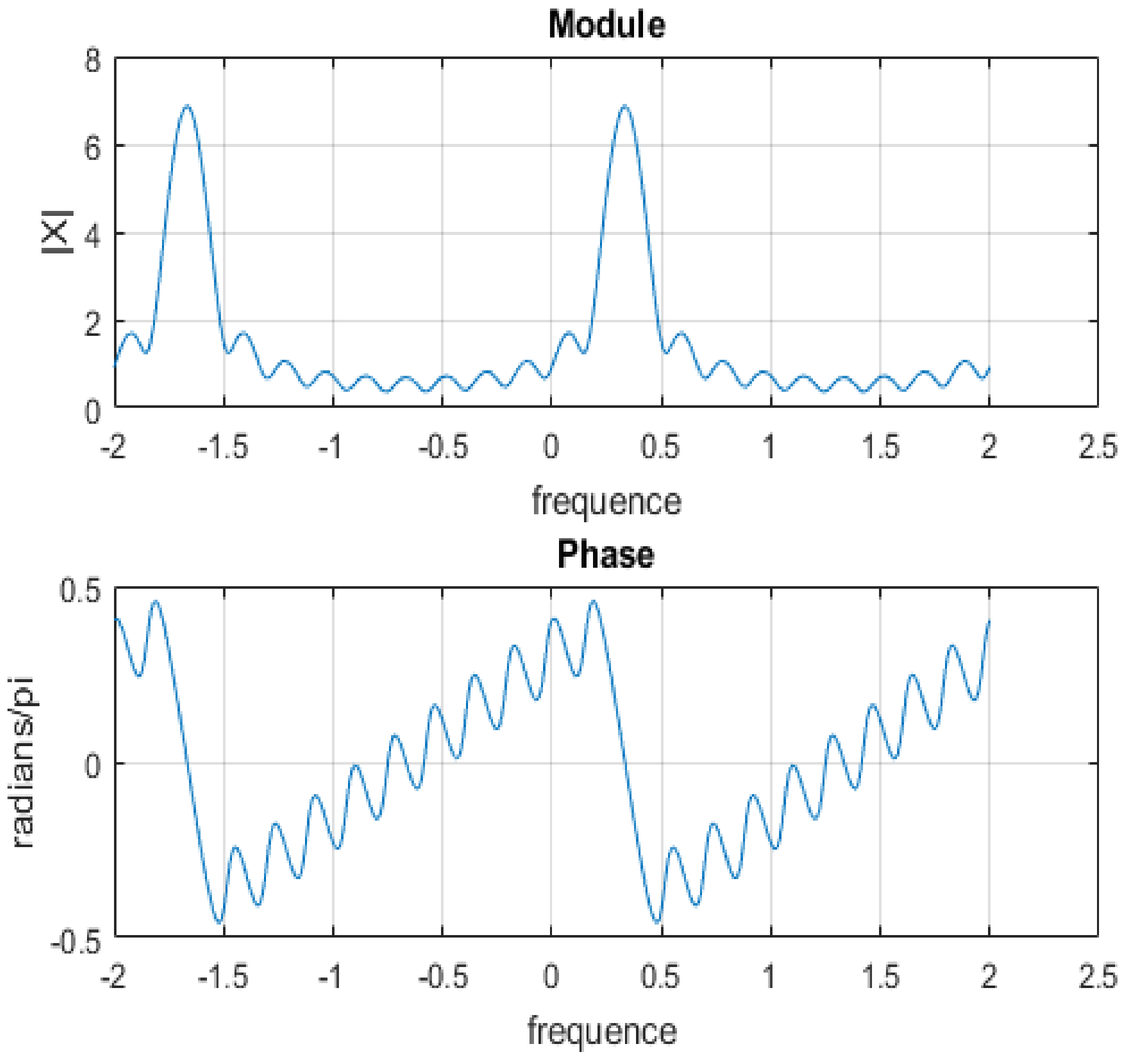
- Soit une séquence suivante:

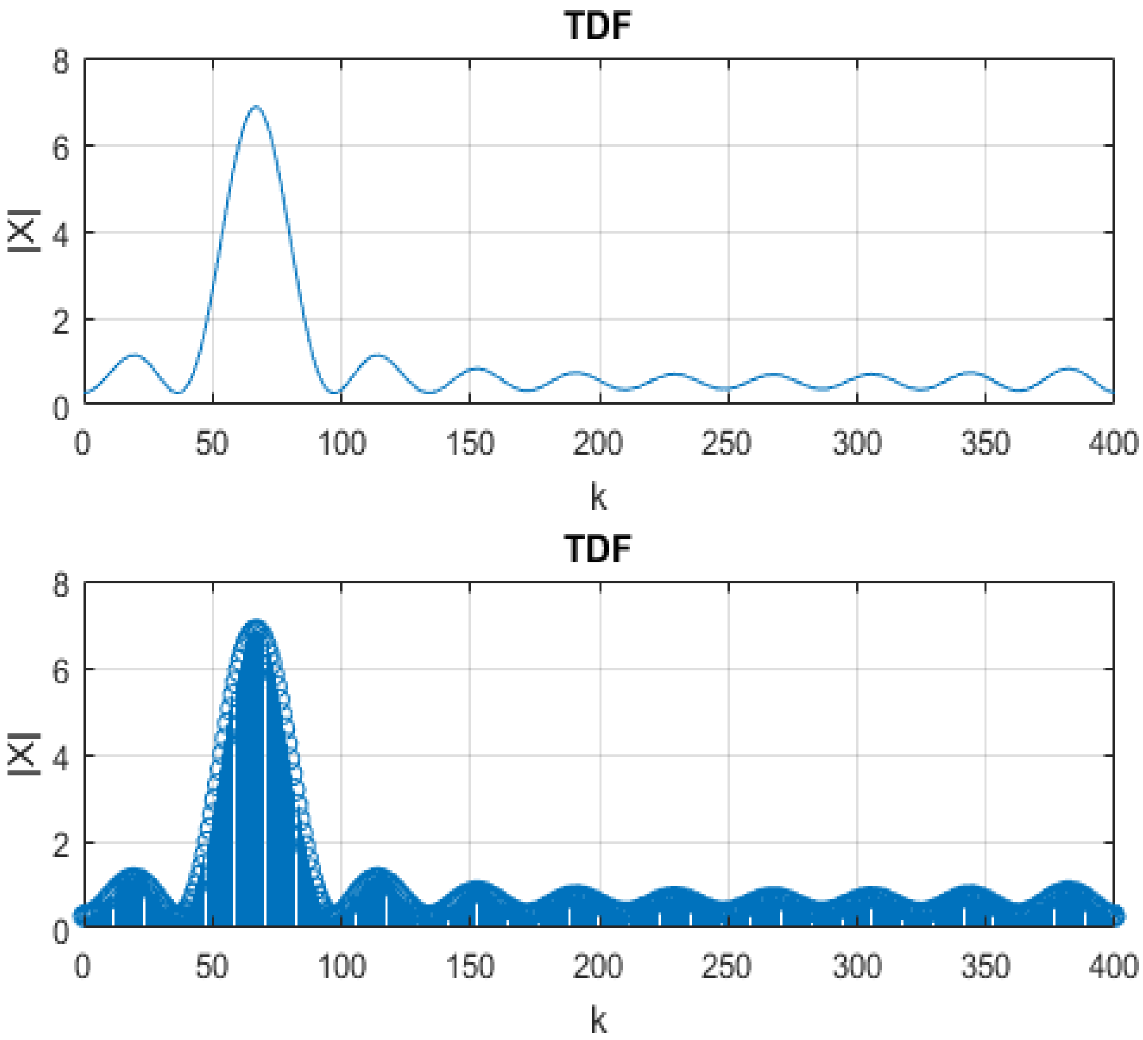
$$x(n) = \begin{cases} 0.9e^{\frac{j\pi n}{3}}, 0 \leq n \leq 10 \\ 0, \quad\quad ailleurs \end{cases}$$

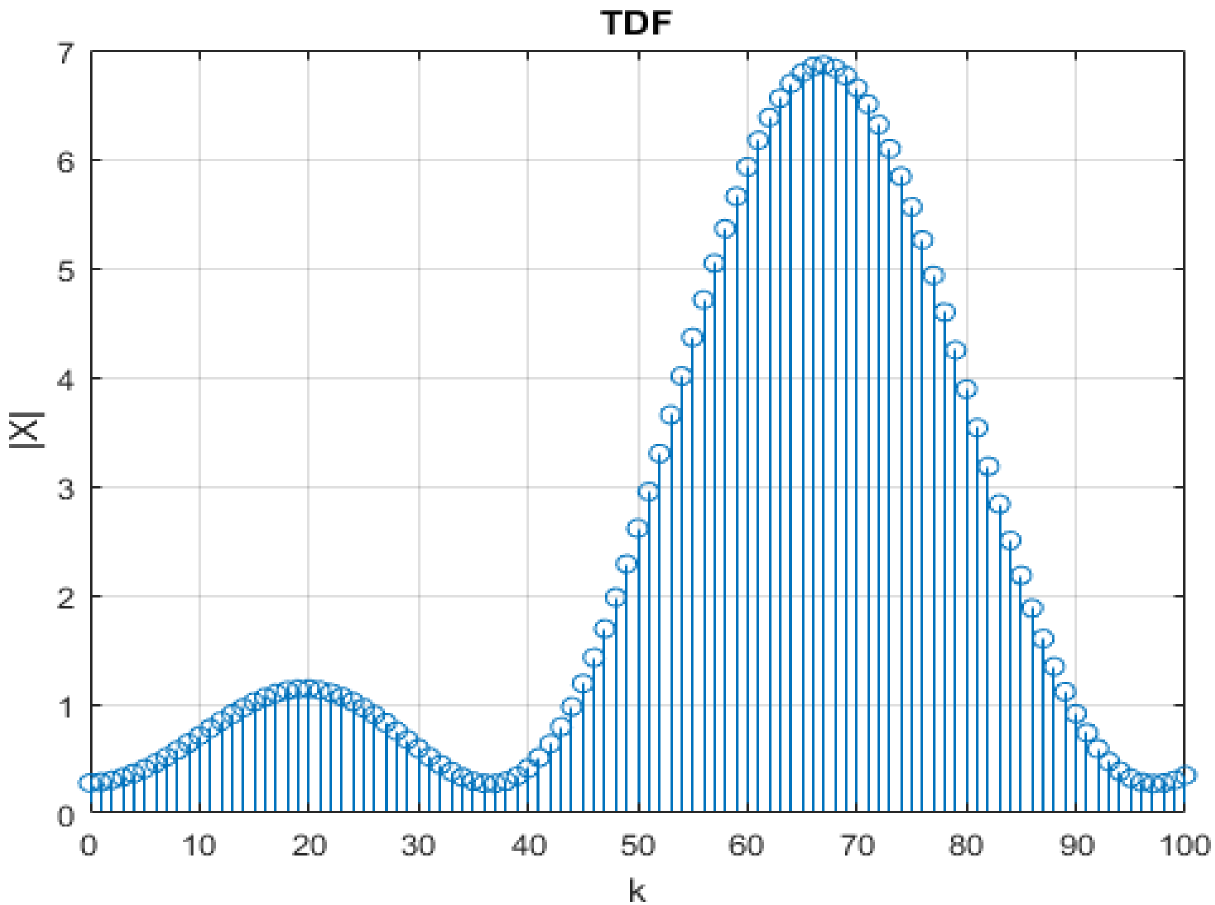
- $x(n)$ n'est pas réelle donc $X(e^{-j\omega}) \neq X^*(e^{jw})$ alors la symétrie n'est pas vérifiée

- $X\left(e^{j\omega}\right)$ est périodique de période 2π

- Évaluons la phase ainsi que le module de $X(e^{j\omega})$ pour 2 périodes sur 401points.


Module
|X|
8
6
4
2
0
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
frequence
Phase
radians/pi
0.5
0
-0.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
frequence


TDF
|X|
k
TDF
|X|
k


TDF
|X|
k
0
1
2
3
4
5
6
7
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

Transformée Rapide de Fourier (TRF)

« Fast Fourier Transform: ***FFT*** »

- Rappel de la transformée Discrète de Fourier ***TDF*** et son inverse

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, 0 \le k \le N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, 0 \le n \le N-1$$

- **avec $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$**

- Problèmatique:
  - ✓ Pour calculer les N coefficients de $X(k)$ nous avons besoin de N^2 multiplications complexes et $N(N-1)$ addition complexes.
- Solution:
  - ✓ Optimisation de calcul de la ***TDF*** basée sur les propriétés de W_N (symétrie, périodicité,…)

➢Propriétés

- ✓ $$W_N^{k(N-n)} = \left(W_N^{kn}\right)^*$$
- ✓ $$W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n} = W_N^{kn}$$ périodicité
- ✓ $$W_N^{kn+\frac{N}{2}} = -W_N^{kn}$$ symétrie
- ✓ $$W_N^{2kn} = W_{N/_2}^{kn}$$
- ✓ $$W_N^{Nn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}Nn} = 1$$

➢Formulation matricielle

❑On peut exprimer la transformée Discrète de Fourier ***TDF*** $X(k)$ sous forme matricielle:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{W_N x}$$

- avec $\boldsymbol{x}$ est un vecteur dans l'espace à N dimensions dont ses composantes formées par les éléments de la séquence $\{x(0), \cdots x(N-1)\}$

- $\boldsymbol{W_N}$ est une matrice écrite dans la base $\boldsymbol{w_k}(0 \leq k \leq N-1)$ dont les composantes sont données par $\{w_N^{0k}, w_N^{1k}, w_N^{2k}, \cdots, w_N^{(N-1)k}\}$

✓ $\boldsymbol{W_N}=(\boldsymbol{w_0},\boldsymbol{w_1},\cdots,\boldsymbol{w_{N-1}})$

✓ $$\boldsymbol{W_N} = \begin{pmatrix} w_N^0 = 1 & \cdots & w_N^0 = 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_N^0 = 1 & \cdots & w_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

- Remarque :
  - ✓Les vecteurs de base $\boldsymbol{w_k} (0 \leq k \leq N-1)$ sont orthogonaux;
  - ✓La matrice $\boldsymbol{W_N}$ est alors orthogonale

- La séquence $x(n)$ sera déduite à partir de l'inverse de vecteur $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{N}\boldsymbol{W}^H\boldsymbol{X}$$

  - par H on désigne le conjugué transposé.

- Une *TDF* de taille 1024 génère:

  - Plus de 4 millions de nombre de multiplications réelles;
  - Plus de 4 millions de nombre d'additions réelles.

Algorithme basé sur la subdivision de la séquence -Décimation en temps-

- Tous les algorithmes sont basés principalement sur la décomposition de calcul de *TDF* d'une séquence de N échantillons en plusieurs *TDF* de longueur plus petite.

- Le nombre N est décomposable en facteurs , typiquement , une puissance de 2.

- Posons $N = 2^M$, avec M un entier

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, 0 \le k \le N-1$$

$$= \sum_{\substack{n=0 \\ pair}}^{N-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{\substack{n=0 \\ impair}}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

$$= \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l) W_N^{2lk} + \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l+1) W_N^{(2l+1)k}$$

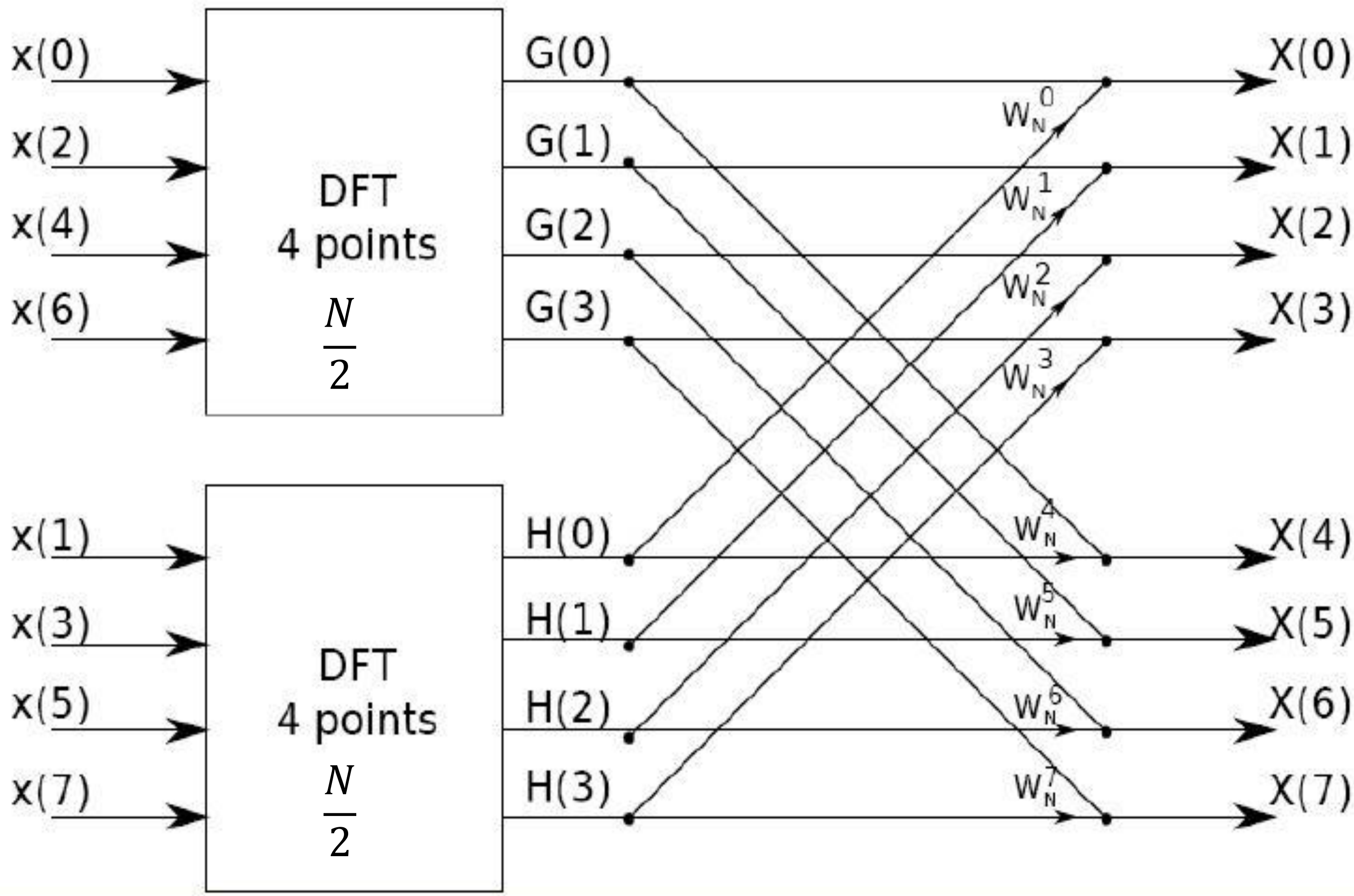
Voir les propriétés

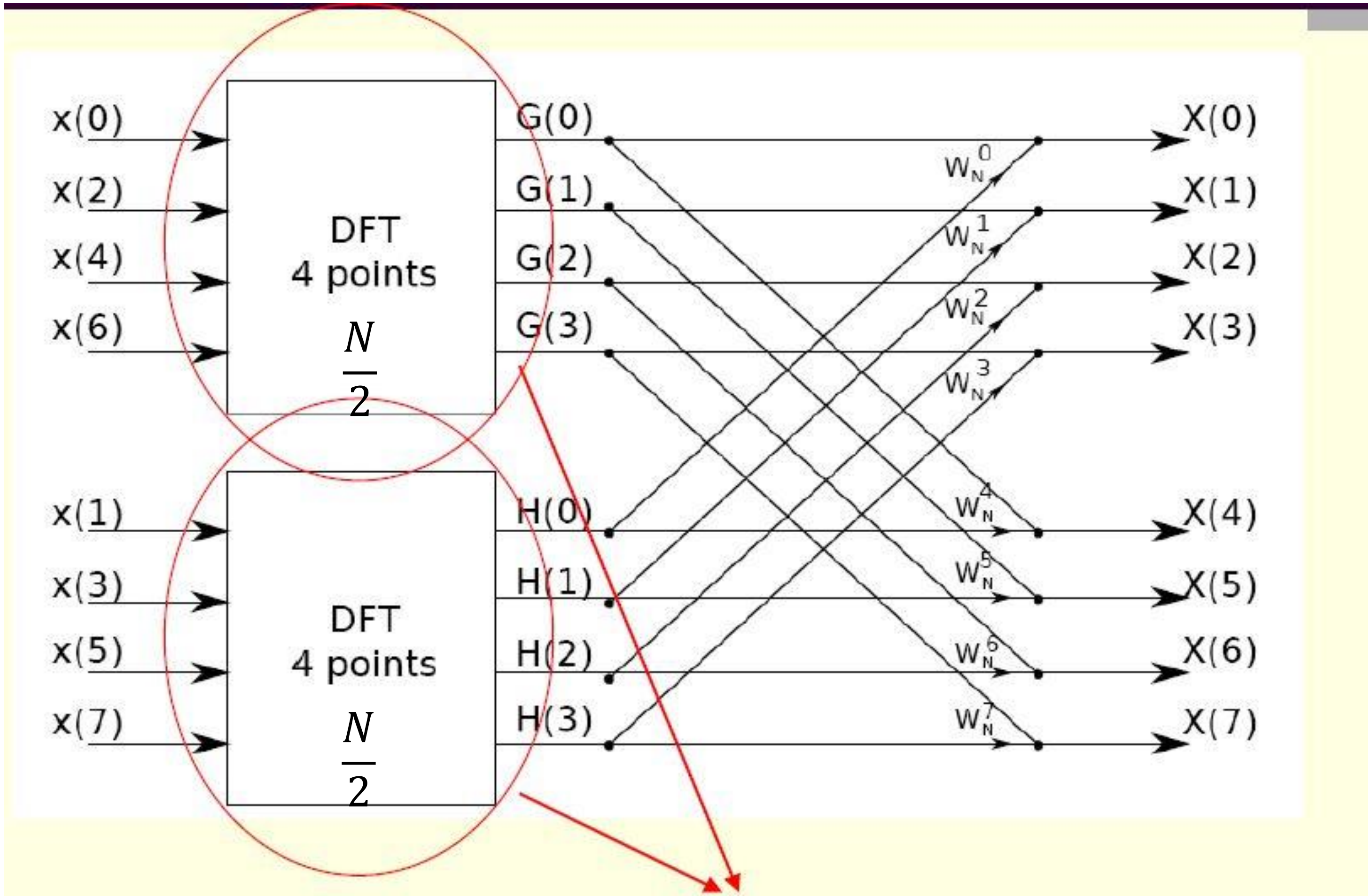
$$= \underbrace{\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l) W_{\frac{N}{2}}^{lk}}_{X_1(k)} + W_N^k \underbrace{\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l+1) W_{\frac{N}{2}}^{lk}}_{X_2(k)}$$

- $X_1(k)$ *TDF* d'une séquence $x(n)$ de longueur $\frac{N}{2}$, avec n un entier pair.

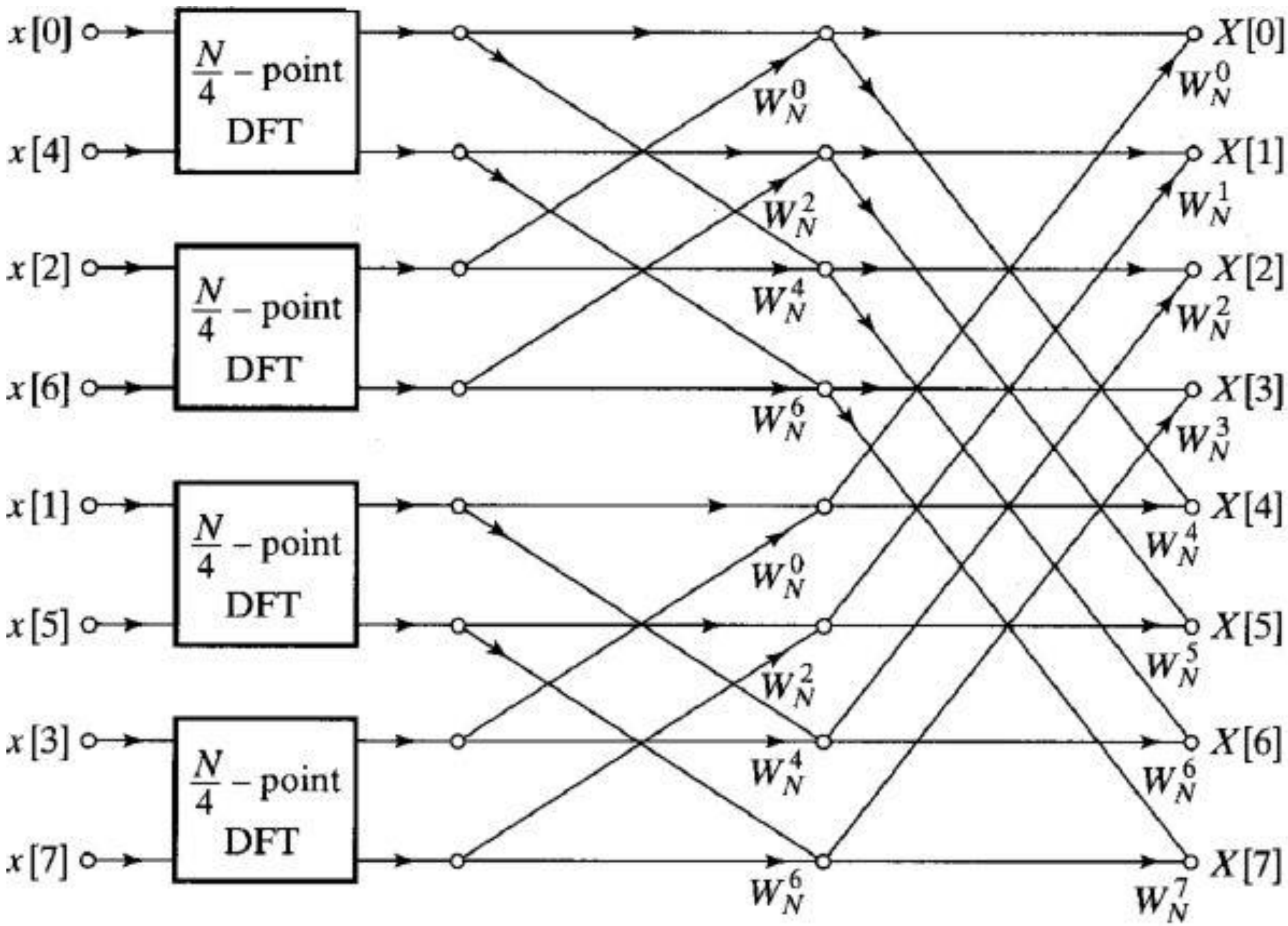
- $X_2(k)$ *TDF* d'une séquence $x(n)$ de longueur $\frac{N}{2}$, avec n un entier impair.

$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k)$$

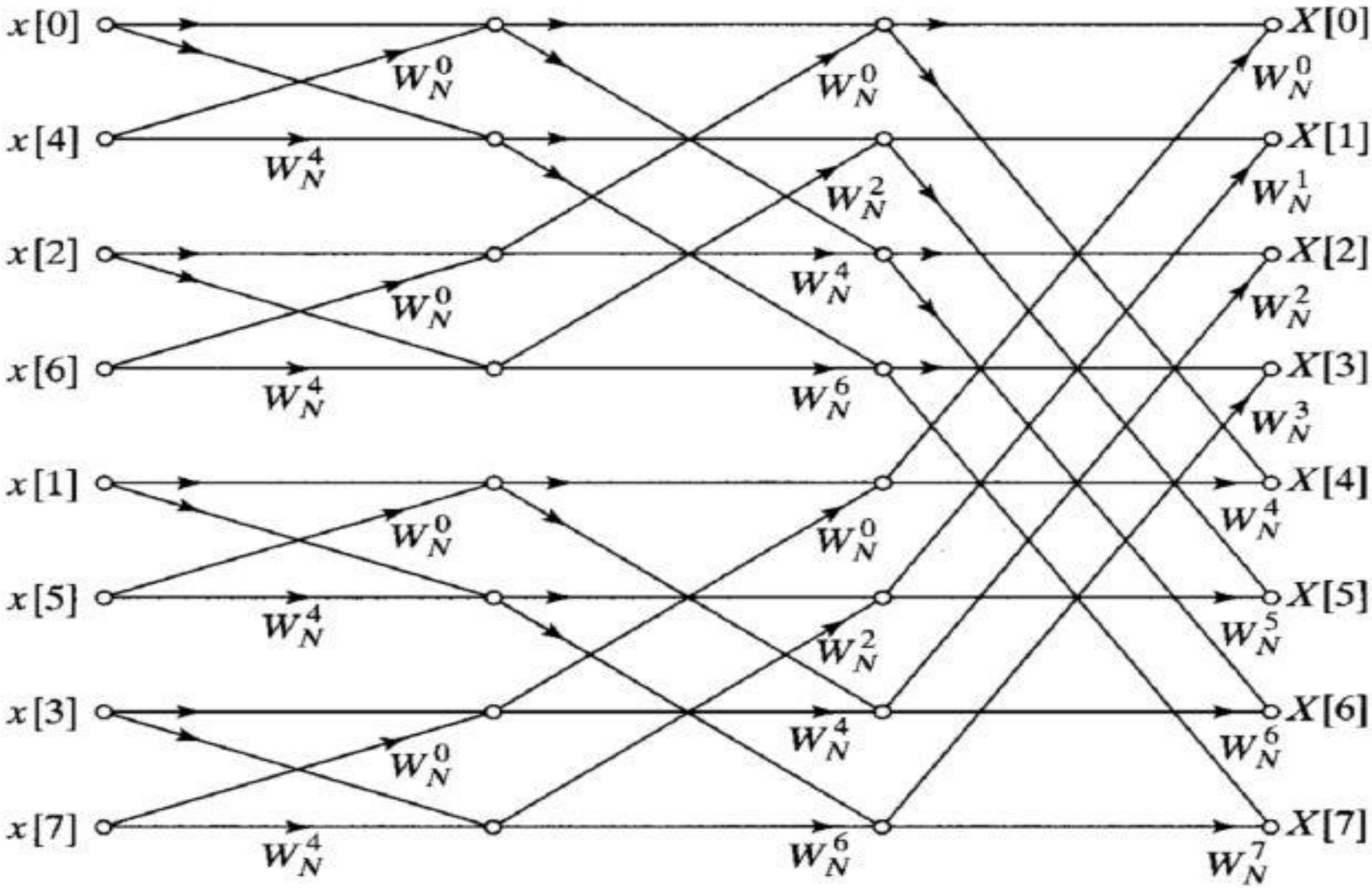

x(0)
x(2)
x(4)
x(6)
DFT
4 points
$\frac{N}{2}$
x(1)
x(3)
x(5)
x(7)
DFT
4 points
$\frac{N}{2}$
G(0)
G(1)
G(2)
G(3)
H(0)
H(1)
H(2)
H(3)
W_N^0
W_N^1
W_N^2
W_N^3
W_N^4
W_N^5
W_N^6
W_N^7
X(0)
X(1)
X(2)
X(3)
X(4)
X(5)
X(6)
X(7)



- La procédure de subdivision peut être appliquée à $X_1(k)$ et $X_2(k)$, ainsi qu'aux calculs de ***TDF*** successives jusqu' à l'obtention de ***TDF*** de séquence de longueur 2.


x[0]
x[4]
x[2]
x[6]
x[1]
x[5]
x[3]
x[7]
N/4 – point DFT
N/4 – point DFT
N/4 – point DFT
N/4 – point DFT
W_N^0
W_N^2
W_N^4
W_N^6
W_N^0
W_N^2
W_N^4
W_N^6
W_N^0
W_N^1
W_N^2
W_N^3
W_N^4
W_N^5
W_N^6
W_N^7
X[0]
X[1]
X[2]
X[3]
X[4]
X[5]
X[6]
X[7]

$N\log_2 N$ opérations élémentaires au final



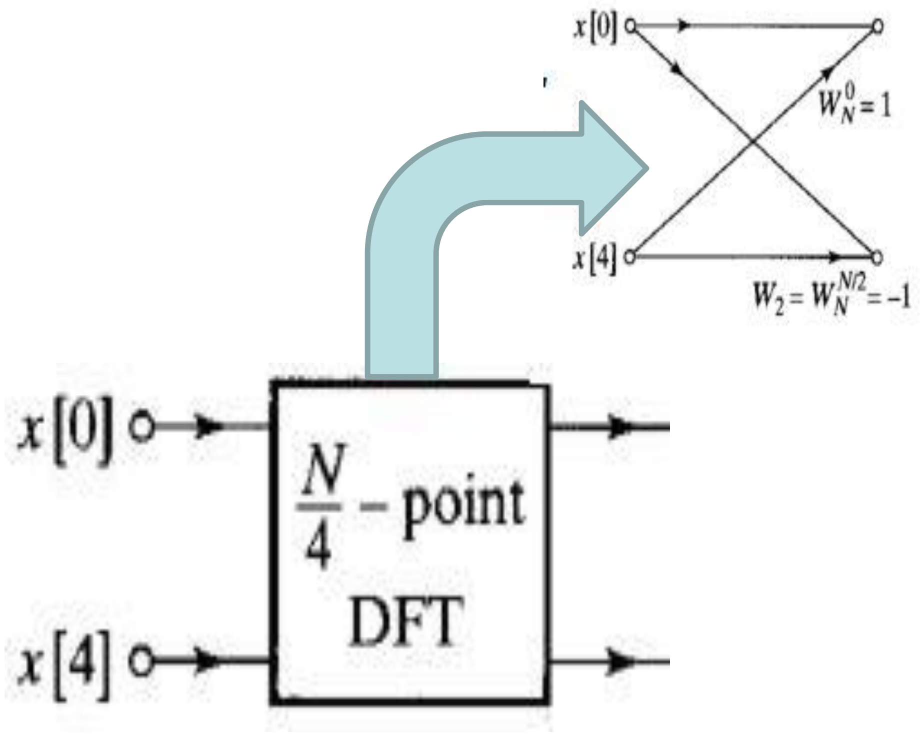
- Le Calcul directe des N coefficients de $X(k)$ nous avons besoin de N^2 multiplications complexes;

- Après une décimation: $N + 2\left(\frac{N}{2}\right)^2 = N + \frac{N^2}{2}$;

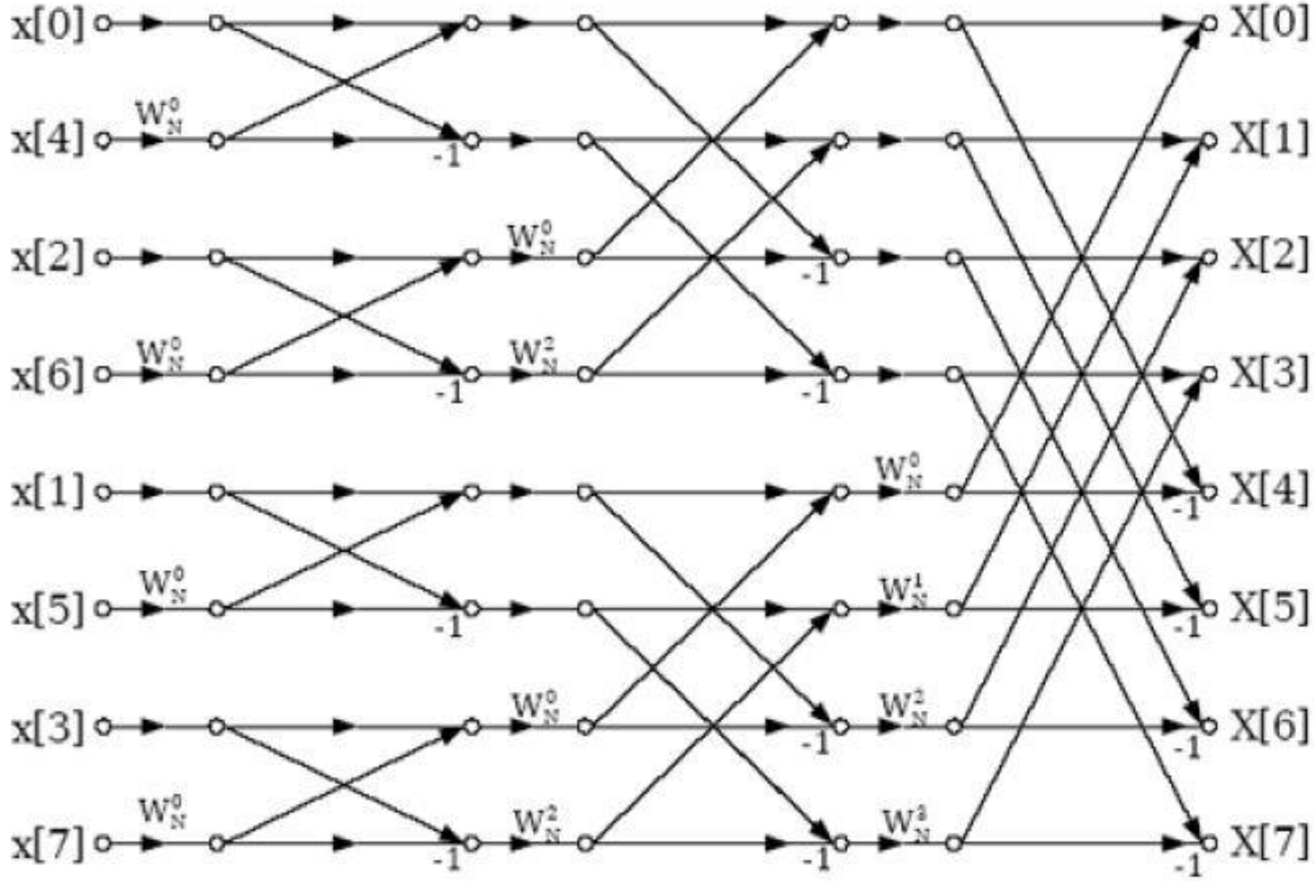
- Après deux décimations: $N + 2\left(\frac{N}{2} + 2\left(\frac{N}{4}\right)^2\right) = 2N + 4\left(\frac{N}{4}\right)^2$;

- Après $M - 1$ décimations: MN:
  le nombre de multiplication complexe est alors $N \log_2 N$;

- Si on utilise la technique suivante, le nombre de multiplication complexe est de $\frac{N}{2}\log_2 N$;



Opérations élementaires réduites au $\frac{N}{2}\log_2 N$



Algorithme basé sur la subdivision de la séquence -Décimation en fréquence-

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, 0 \leq k \leq N-1$$

- $X(k)$ peut être traitée en deux étapes:
  - Pour les k pairs $k = 0,2,\cdots,N-2$
  - Pour les k impairs $k = 1,3,\cdots,N-1$

- Soit $k = 2l$, k sont pairs

$$X(2l) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n2l}, \quad l = 0,1,2,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

Voir les propriétés

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_{\frac{N}{2}}^{ln} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) W_N^{2ln}$$

Posons $m = n - \frac{N}{2}$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_{\frac{N}{2}}^{ln} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{2l(n+\frac{N}{2})}$$

$$W_N^{2l(n+\frac{N}{2})} = W_N^{2ln} W_N^{lN}$$

Voir les propriétés

$$= 1$$

$$W_N^{2l(n+\frac{N}{2})} = W_{\frac{N}{2}}^{ln}$$

$$X(2l) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x(n) + x(n+\frac{N}{2})\right) W_{\frac{N}{2}}^{ln},\ l = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

- La ***TDF*** d'une séquence $\left(x(n) + x(n+\frac{N}{2})\right)$ de longueur $\frac{N}{2}, n = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$ est bien $X(k), k\ pairs$.

- Soit $k = 2l + 1$, k sont impairs

$$X(2l+1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n(2l+1)}\,, \quad l = 0,1,2,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

- De la même manière que le développement précèdent on obtient:

$$X(2l+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x(n) - x(n+\frac{N}{2})\right) W_N^n W_{\frac{N}{2}}^{ln},\ l = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

- La ***TDF*** d'une séquence$\left(x(n) - x(n+\frac{N}{2})\right) W_N^n$ de longueur $\frac{N}{2}$ est bien $X(k), k\ impairs$.

TRE et décimation en fréquence