POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

ELE 6705 Traitement numérique des signaux

Hassan Bensalah

Chap. II : Transformation en Z

Sujets abordés

- Définition
- Régions de convergence
- Transformation inverse
- Filtre numérique(Fonction de transfert)
- Propriétés
- Discrétisations des filtres analogiques

Transformée en Z

- La transformée en Z est aux systèmes en temps discret ce que la transformée de *Laplace* est aux systèmes en temps continu :
  - Analyse dans le domaine fréquentiel est souvent plus simple que dans le domaine temporel : convolution vs. opération algébrique.
  - Représentation d'un système par sa fonction de transfert ou même par ses pôles et ses zéros.
  - Applicable à un plus grand ensemble des signaux et plus facilement inversible que la transformée de *Fourier*.

$$X_e(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e(t)e^{-st}\,dt$$

$x_e(t)$: Signal Échantillonné est nul partout sauf pour $t = nT; n = 0,1, \dots,$

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

$$X_e(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT)\, e^{-st}\,dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)e^{-snT}, \qquad z = e^{-sT}$$

Définition de la transformée en Z

- La transformée en Z d'une séquence $x(n)$ est définie comme la série $X(z)$:

$$X(z) = \mathcal{Z}(x(n)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$\left\{ z \in \mathrm{RC} \subset \mathbf{C} \,\middle|\, \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \text{ converge} \right\}$$

- La transformée en Z unilatérale :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Existence de la transformée en Z

- Existence de la transformée en Z implique la convergence absolue de la série :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n) z^{-n} \right| < \infty$$

- Critère de *Cauchy* sur la convergence des séries de puissance :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u(n) < \infty \quad \text{si} \quad \lim_{n \to \infty} \left| u(n) \right|^{1/n} < 1$$

- Convergence d'une transformée en Z :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n}}_{X_1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}}_{X_2}$$

Existence de la transformée en Z

- Partie causale X_2 :

$$X_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| x(n) z^{-n} \right|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left| x^{1/n}(n) z^{-1} \right| < 1$$

$$R_{\_} = \lim_{n\to\infty} \left| x(n) \right|^{1/n}$$

X_2 converge pour

$$|z| > R_{\_}$$

Existence de la transformée en Z

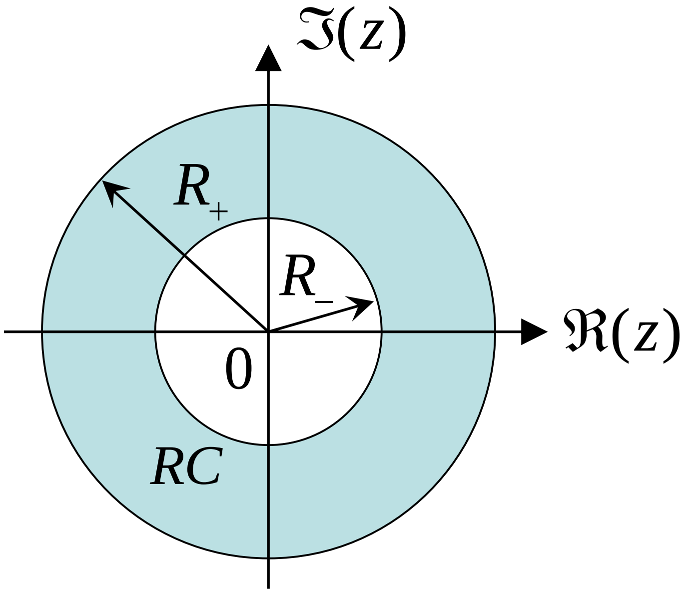
- Partie anti-causale X_1 :

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} x(-n) z^{n}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left| x(-k) z^k \right|^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \left| x^{1/k}(-k) z \right| < 1$$

X_1 converge pour

$$|z| < R_+ = \left(\lim_{n\to\infty} \left| x(-n) \right|^{1/n} \right)^{-1}$$



- Région de convergence :

$$R_- < |z| < R_+$$

Pôle et zéro

- $X(z)$ est une fonction rationnelle complexe :

$$X(z) = K\,\frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}$$

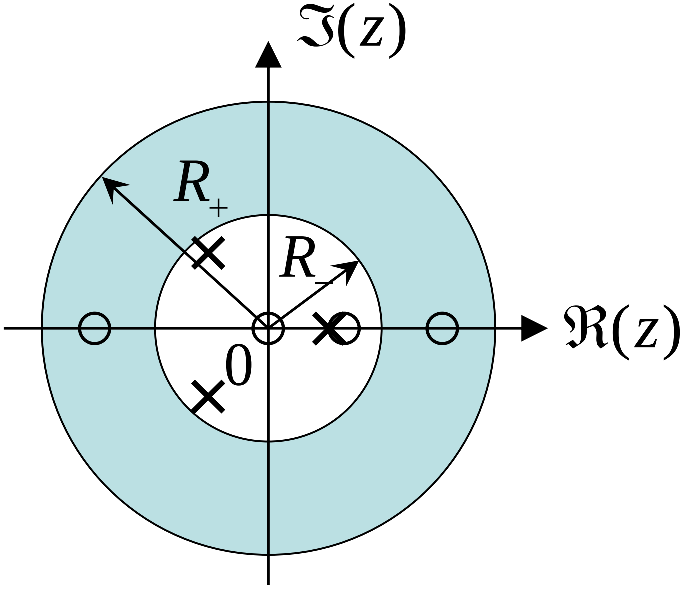
- Pôle (point singulier de $X(z)$) :

$$X(p_i) = \infty, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

- Zéro :

$$X(z_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

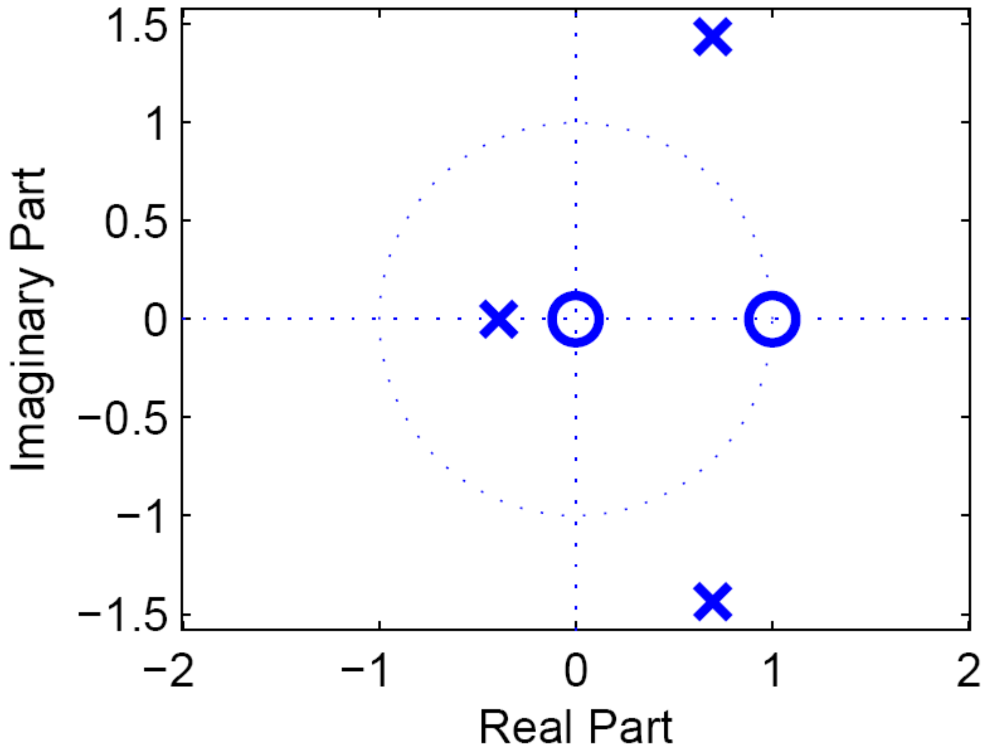
- Pôle et zéro à l'infini
  - L'infini est un pole si $n < m$.
  - L'infini est un zéro si $n > m$.



Tracer pôles et zéros avec Matlab

$$X(z) = \frac{z^2 - z}{z^3 - z^2 + 2z + 1}$$

```
num = [1 -1 0];
den = [1 -1 2 1];
z=roots(num);
p=roots(den);
zplane(z,p);
disp(z);
disp(p);
```



Exemples de la transformée en Z

- Impulsion de Dirac :

$$\mathcal{Z}(\delta(k)) = 1, \quad \forall z \in \mathbf{C}$$

- Échelon unitaire :

$$\mathcal{Z}(1(n)) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > R_{-} = \lim_{k \to \infty} |1(n)|^{1/n} = 1.$$

- $x(n) = a^n 1(n)$:

$$\mathcal{Z}(1(n) a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a^{-1} z\right)^{-n} = \frac{1}{1 - a z^{-1}}, \quad |z| > a.$$

- $x(n) = a^n$: comme $R_{-} = R_{+} = |a|$, la transformée en Z n'existe pas.

Transformée en Z inverse

- Théorème intégral de Cauchy

$$\oint z^{n-1}dz = \begin{cases} 2\pi j, & pour\ n = 0 \\ & ;\ \ j = \sqrt{-1} \\ 0, & autrement \end{cases}$$

- Transformée en Z inverse

$$\oint X(z)z^{n-1}dz = \oint \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l)z^{-l}z^{n-1}dz = \oint \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l)\, z^{(n-l)-1}dz$$

Si: $n - l = 0; \quad n = l$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz = \mathcal{Z}^{-1}(X(z))$$

Transformée en Z inverse

- Inverse à l'aide du théorème des résidus

$$x(n) = \sum_{\text{aux poles de } X(z)z^{n-1}} \left[\text{residus de } X(z)z^{n-1} \right]$$

pôles d'ordre 1 :

$$r_1 = \lim_{z \to a} \left(X(z)z^{n-1}(z-a) \right)$$

pôles d'ordre q :

$$r_q = \lim_{z \to a} \frac{1}{(q-1)!} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} \left(X(z)z^{n-1}(z-a) \right)$$

L'inverse de l'intégrale

- **Exemple** : Inverser $X(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$

$$x(n) = \left.\frac{z^n}{z-2}\right|_{z=1} + \left.\frac{z^n}{z-1}\right|_{z=2} = -1 + 2^n,\ n \geq 0$$

- **Exemple** : Inverser $X(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$

$$x(0) = \sum_{z=0,1,2}\left[\text{residus de } \frac{1}{z(z-1)(z-2)}\right] = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$$

$$x(n) = \sum_{z=1,2}\left[\text{residus de } \frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)}\right] = -1 + 2^{n-1},\ n > 0$$

$$x(n) = \left(-1 + 2^{n-1}\right)1(n-1)$$

L'inverse directe

- Écrire $X(z)$ sous forme des séries de puissance

$$X(z) = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \cdots$$

- Identifier la séquence $x(n)$.
- **Exemple** : Inverser $X(z) = \dfrac{z}{(z-2)(z-1)} = \dfrac{z}{z^2 - 3z + 2}$

$$\begin{array}{r|l} & z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + 15z^{-4} + \cdots \\ \hline z^2 - 3z + 2 & z \\ & \underline{z - 3 + 2z^{-1}} \\ & \quad 3 - 2z^{-1} \\ & \quad \underline{3 - 9z^{-1} + 6z^{-2}} \\ & \qquad 7z^{-1} - 6z^{-2} \\ & \qquad \underline{7z^{-1} - 21z^{-2} + 14z^{-3}} \\ & \qquad\qquad 15z^{-2} - 14z^{-3} + \cdots \end{array}$$

$$\Rightarrow x(n) = 2^n - 1,\ n \geq 0$$

L'inverse par factorisation

- Écrire $X(z)$ sous forme

$$X(z) = P(z)/Q(z), \quad \text{ordre}(P) < \text{ordre}(Q)$$

- Pour les pôles simples

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{z - p_i}, \quad \alpha_i = (z - p_i)P(z)/Q(z)\Big|_{z=p_i}$$

- Pour un pôles d'ordre $q > 1$

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{j=1}^{q} \frac{\beta_j}{(z - p_n)^j}$$

$$\beta_j = \frac{1}{(q-j)!} \frac{d^{q-j}}{dz^{q-j}} \Big[(z - p_n)^j P(z)/Q(z) \Big]\Big|_{z=p_n}$$

L'inverse par factorisation

- **Exemple** : Inverser $X(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{-z}{z-1} + \frac{z}{z-2} \leftrightarrow x(n) = -1 + 2^n,\ n \geq 0.$$

- **Exemple** : Inverser $X(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$

$$X(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} \to ?$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-2)}$$

$$\to X(z) = \frac{1}{2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{2(z-2)}$$

$$\to x(n) = \frac{1}{2}\delta(n) - 1(n) + \frac{1}{2}2^n 1(n) = (-1 + 2^{n-1})1(n-1)$$

Factorisation avec Matlab

- **Exemple** : Inverser

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

```
B = [1]; A = [1 -3 2];
[R,P,K] = residue(B,A);
```

```
B(s)       R(1)       R(2)             R(n)
-----  =  --------- + --------- + ... + ---------- + K(s)
A(s)     z - P(1)   z - P(2)          z - P(n)
```

```
R = [1 -1]; P = [2 1]; K = [];
```

$$\frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \rightarrow X(z) = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}$$

Propriétés de la transformée en Z

- Linéarité

$$x(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\alpha x_1(n) + \beta x_2(n) \right) z^{-n}$$

$$= \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) z^{-n} + \beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) z^{-n}$$

$$= \alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$$

La région de convergence est au moins l'intersection des régions associées à $X_1(z)$ et $X_2(z)$.

Propriétés de la transformée en Z

- Décalage et la transformée bilatérale

$$y(n) = x(n-l)$$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-l) z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-(l+m)}$$

$$= z^{-l} X(Z)$$

- **Exemple** : Inverser $Y(z) = 1/(z-1)(z-2)$

$$X(z) = zY(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

$$x(n) = (2^n - 1)1(n)$$

$$\Downarrow$$

$$y(n) = \mathcal{Z}^{-1}(z^{-1}X(z)) = x(n-1) = (2^{n-1} - 1)1(n-1)$$

- Operateur de retard unité

$$x(n) \longrightarrow \boxed{z^{-1}} \longrightarrow x(n-1)$$

- Application aux équations aux différences

$$y(n) = u(n) - b_1 y(n-1) - b_2 y(n-2)$$

$$Y(z) = U(z) - b_1 z^{-1} Y(z) - b_2 z^{-2} Y(z)$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} U(z)$$

$$y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{1}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} U(z) \right)$$

Propriétés de la transformée en Z

- Décalage et transformée unilatérale

$$y(n) = x(n-l)$$

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-1) z^{-n} = z^{-1} \sum_{m=-1}^{\infty} x(m) z^{-m}$$
$$= z^{-1}\left(x(-1)z + \sum_{m=0}^{\infty} x(m) z^{-m} \right) = x(-1) + z^{-1} X(Z)$$

- **Exemple** : Résoudre l'équation aux différence

$$y(n) = u(n) + \alpha y(n-1),\ y(-1) = K,\ u(n) = e^{j\Omega_0 n} 1(n)$$

$$Y(z) = U(z) + \alpha K + \alpha z^{-1} Y(z)$$

$$Y(z) = \frac{U(z) + \alpha K}{1 - \alpha z^{-1}}$$

$$= \frac{\alpha K}{1 - \alpha z^{-1}} + \frac{1}{\left(1 - \alpha z^{-1}\right)\left(1 - e^{j\Omega_0} z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{\alpha K}{1 - \alpha z^{-1}} + \frac{\alpha}{\left(\alpha - e^{j\Omega_0}\right)\left(1 - \alpha z^{-1}\right)} + \frac{e^{j\Omega_0}}{\left(e^{j\Omega_0} - \alpha\right)\left(1 - e^{j\Omega_0} z^{-1}\right)}$$

$$y(n) = \alpha^{n+1} K \qquad \leftarrow \text{réponse libre}$$

$$+ \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha - e^{j\Omega_0}} - \frac{e^{j\Omega_0 (n+1)}}{\alpha - e^{j\Omega_0}} \quad \leftarrow \text{réponse forcée}$$

$$n \geq 0$$

Propriétés de la transformée en Z

- Changement d'échelle : $w = az$

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}(X(z)) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(w/a)(w/a)^{n-1} d(w/a)$$

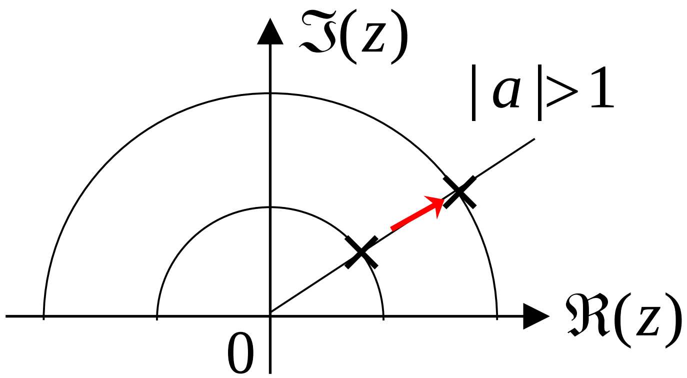
$$a^n x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(w/a) w^{n-1} dw$$

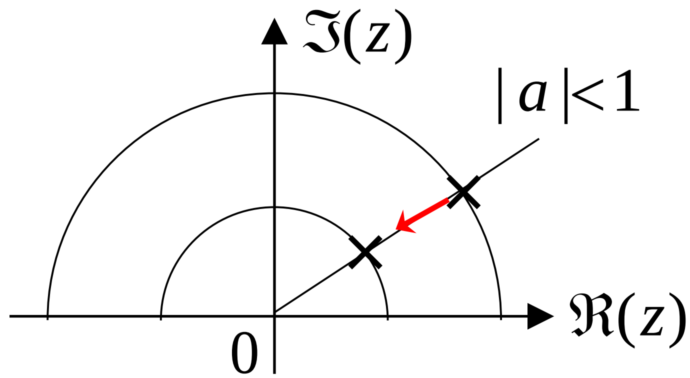
$$a^n x(n) \leftrightarrow X(z/a)$$

- **Remarque :** moduler le signal par une séquence en puissance changera les pôles et les zéros de $X(z)$.

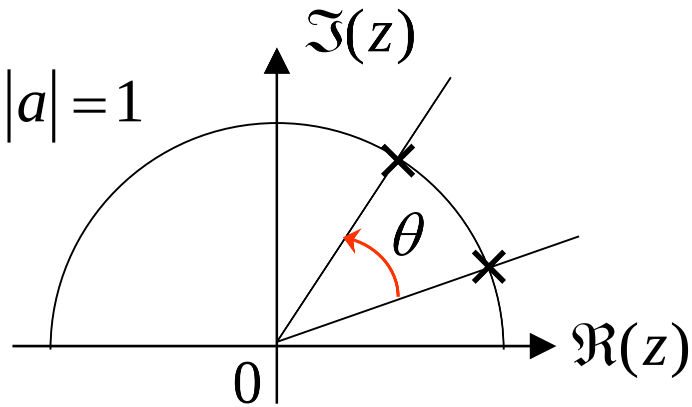
- Effet du changement d'échelle

  a est une valeur réelle





a est une valeur complexe $a = |a|e^{j\theta}$



Propriétés de la transformée en Z

- Dérivation dans le domaine fréquentiel

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n) x(n) z^{-n-1} \rightarrow -z \frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n x(n) z^{-n}$$

$$nx(n) \leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}$$

- **Exemple** : Considérons la séquence $n1(n)$

$$n1(n) \leftrightarrow -z \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

Propriétés de la transformée en Z

- Convolution (ou produit de séquences) $y(n) = x(n) * g(n)$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x(n) * g(n)) z^{-n} = \sum_{n=\_\infty}^{+\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l) g(n-l) \right) z^{-n}$$

Si on pose: $m = n - l$

$$Y(z) = \sum_{l=\_\infty}^{+\infty} x(l) \underbrace{\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(m) z^{-m} \right)}_{G(z)} z^{-l}$$

$$Y(z) = X(z) G(z)$$

Propriétés de la transformée en Z

- Valeur initiale d'une séquence causale

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \Rightarrow x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

- Valeur finale : si $x(n) \leftrightarrow X(z)$ et $(1-z^{-1})X(z)$ n'a pas de pôles sur ou à l'extérieur du cycle unitaire, alors la valeur finale de la séquence $x(n)$ est donnée par

$$\lim_{n \to \infty} x(n) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) X(z)$$

- **Exemple** : $X(z) = z/(z-1)$

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} \frac{z}{z-1} = 1, \ \lim_{n \to \infty} x(n) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) \frac{z}{z-1} = 1$$

En effet : $z/(z-1) \leftrightarrow 1(n)$

Fonction de transfert

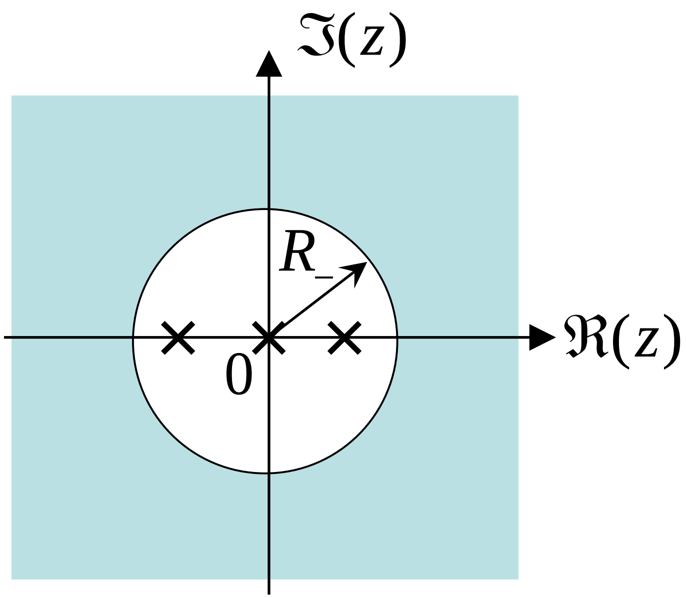
- Définition : pour un système LTI :

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(n-m) = u(n) * h(n) \leftrightarrow Y(z) = U(z)H(z)$$

Fonction de transfert d'un filtre ou un système :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathcal{Z}\left(h(n)\right)$$

- Causalité : La réponse impulsionelle d'un système causal est convergée pour tout $|z| > R\_$ $\longrightarrow$ tous ses pôles sont à l'intérieur d'un cercle.



Fonction de transfert

- Stabilité : un système est de gamme dynamique bornée (entrée bornée / sortie bornée) si la réponse impulsionnelle est convergente

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| h(n) \right| < \infty$$

Or :

$$\left| H(z) \right| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| h(n) z^{-n} \right|$$

Sur un cercle à rayon unité :

$$\left| H(e^{j\Omega}) \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| h(n) e^{-j\Omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| h(n) \right|$$

Pour qu'un système soit stable, le cercle de rayon unité doit appartenir au domaine de convergence de sa FdT.

- Exemple: Stabilité des filtres récursifs.

Filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII)(intégrateur)

- Soit le filtre définit par son algorithme

$$y(n) = 2y(n-1) + u(n)$$

- Sa réponse impulsionnelle est la suivante:

$y(0) = 1$ C'est une série qui diverge, donc non stable
$y(1) = 2$ Il doit alors exister une conditions sur les
$y(2) = 4$ coefficients, pour que le filtre soit stable
$\vdots$

- Le filtre numérique $H(z)$ est définit comme suit:

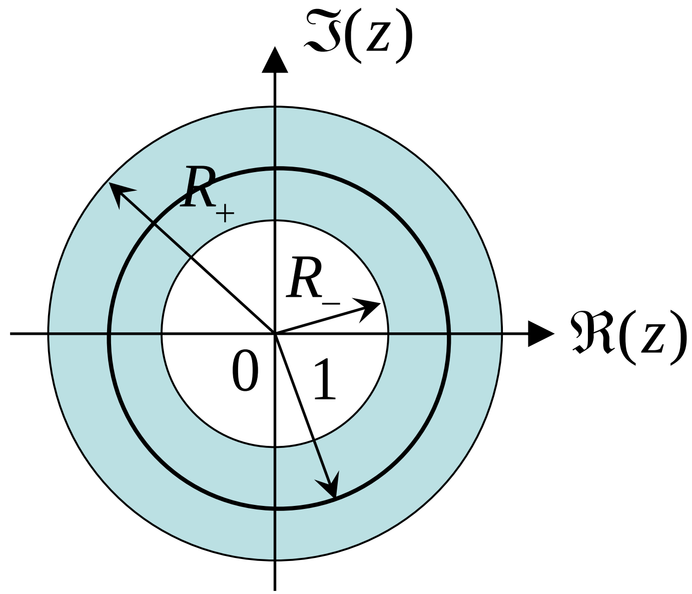
$$H(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}$$

- Pôle de $H(z)$:

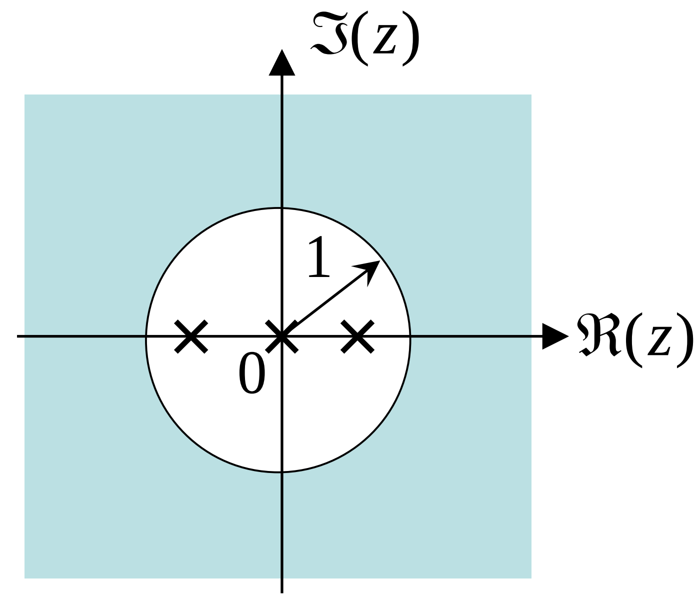
$$|2| < 1$$

Fonction de transfert

- Système stable



- Système stable et causal



- **Rappel :** moduler le signal par une séquence en puissance changera les pôles les zéros de $X(z)$. Ceci permet de stabiliser un système.

$$a^n x(n) \leftrightarrow X(z/a)$$

Discrétisation des FdT en *s*

- Considérons un signal discrétisé :

$$x_s(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(t-nT)$$

Sa transformée de Laplace est donnée par :

$$X_s(s) = \int_{t=0^-}^{\infty} x_s(t)e^{-st}dt = \int_{t=0^-}^{\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(t-nT)\right)e^{-st}dt$$

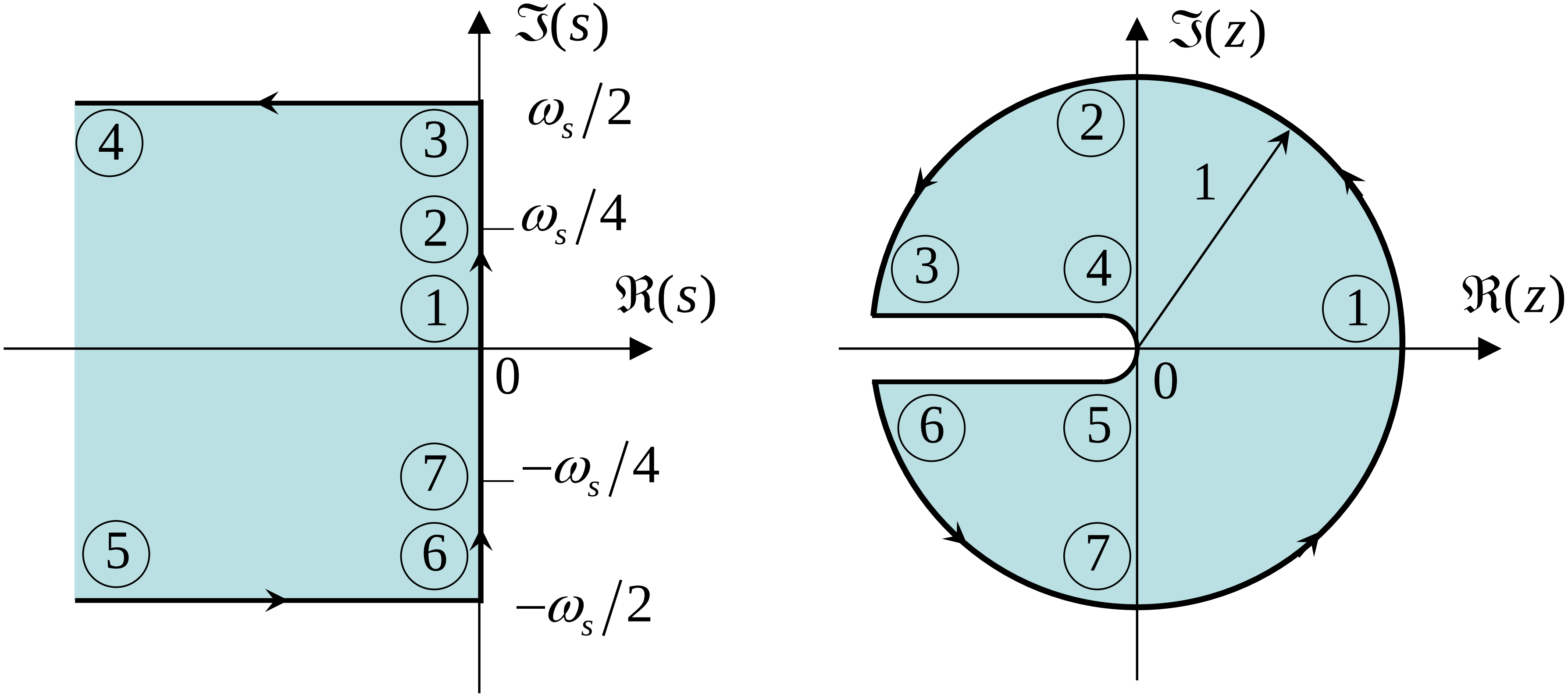
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\int_{t=0^-}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-st}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-nsT}$$

$$\Rightarrow z = e^{Ts},\ X_s(s) = X(z)\Big|_{z=e^{Ts}}$$

Projection du plan-*s* au plan-z

- Projection d'une bande (la bande primaire) :

$$z = e^{Ts} = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma} \angle (2\pi\omega / \omega_s)$$



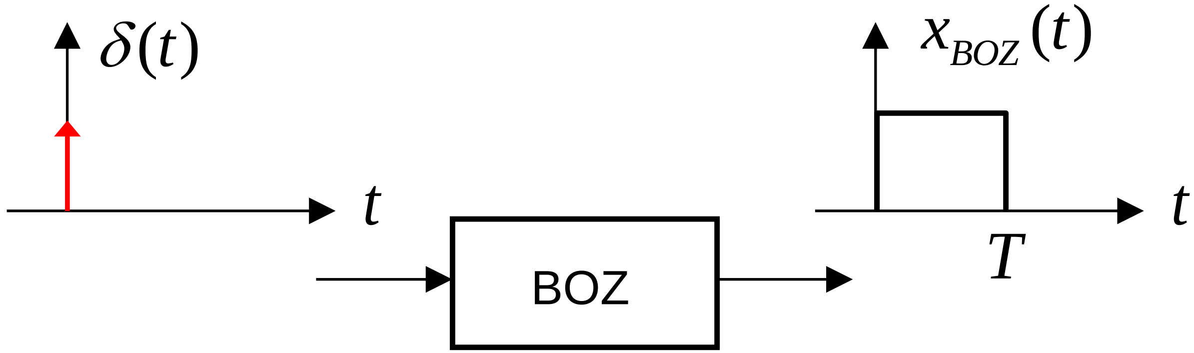
$$-\omega_s / 2 < \omega \le \omega_s / 2$$

Discrétisation avec bloqueur d'ordre zéro

- Propriété de BOZ

$$x_n(t) = x(nT), \quad nT \le t < (n+1)T$$

- Réponse impulsionelle

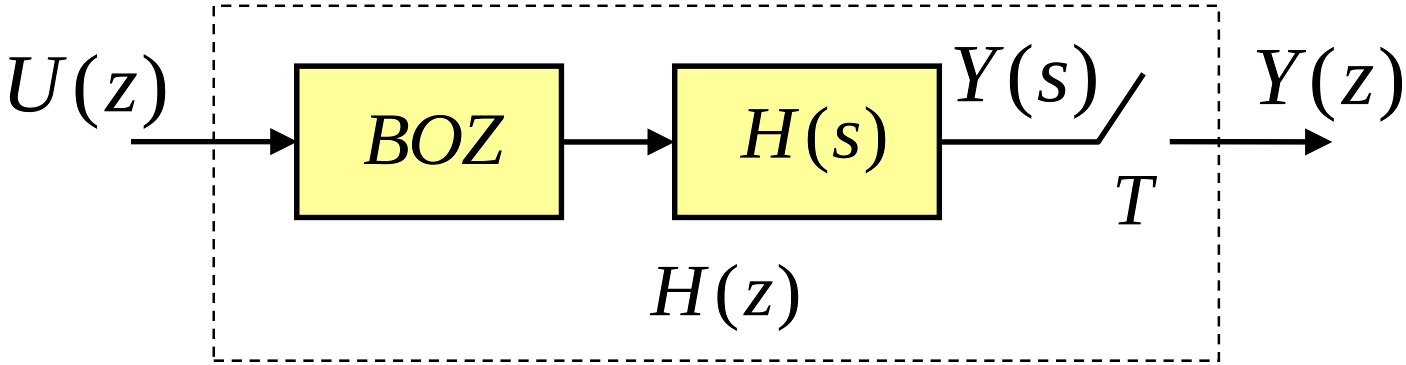


$$h_{BOZ}(t) = 1(t) - 1(t-T)$$

- Fonction de transfert de BOZ

$$H_{BOZ}(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

Transformée en Z équivalente avec BOZ



$$BOZ(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s},\ z = e^{sT}$$

$$H(z) = \mathcal{Z}\Big(BOZ(s)H(s)\Big) = \mathcal{Z}\Big((1-e^{-sT})H(s)/s\Big)$$

$$= \mathcal{Z}(1-e^{-sT})\mathcal{Z}(H(s)/s)$$

$$= (1-z^{-1})\mathcal{Z}(H(s)/s)$$

$$= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\Big(\mathcal{L}^{-1}(H(s)/s)\Big)$$

- **Exemple :** TZ équivalente de $H(s) = K/(\tau s + 1)$

$$y_s(t) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{K}{s(\tau s + 1)}\right) = K\,\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s + 1/\tau}\right)$$

$$= K(1 - e^{-t/\tau}),\ t \geq 0$$

$$y(nT_s) = K(1 - e^{-nT_s/\tau})1(n)$$

$$Y(z) = (1 - z^{-1})K\left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T_s/\tau}z^{-1}}\right)$$

$$= K\left(1 - \frac{1 - z^{-1}}{1 - e^{-T_s/\tau}z^{-1}}\right) = \frac{K(z^{-1} - e^{-T_s/\tau}z^{-1})}{1 - e^{-T_s/\tau}z^{-1}}$$

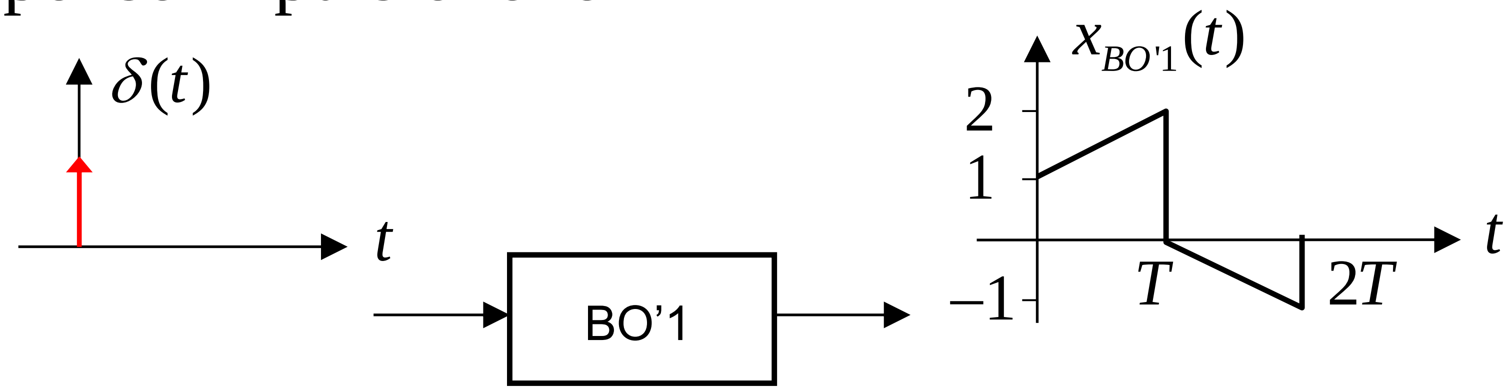
$$= \frac{K(1 - e^{-T_s/\tau})}{z - e^{-T_s/\tau}}$$

Discrétisation avec bloqueur d’ordre 1

- Propriété de BO’1

$$x_n(t) = x(nT) + \frac{x(nT) - x((n-1)T)}{T}(t - nT),\ nT \le t < (n+1)T$$

- Réponse impulsionelle



$$x_n(t) = 1(t) + \frac{1}{T}t\,1(t) - 2\,1(t-T) - \frac{2}{T}(t-T)1(t-T)$$
$$+1(t-2T) + \frac{1}{T}(t-2T)1(t-2T)$$

- Fonction de transfert de BO'1

$$H_{BO'1}(s) = \frac{1}{s} - \frac{2e^{-Ts}}{s} + \frac{e^{-2Ts}}{s} + \frac{1}{Ts^2}(1 - 2e^{-Ts} + e^{-2Ts})$$
$$= \frac{1+Ts}{T}\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right)^2$$

- Réponse fréquentielle

$$H_{BOZ}(j\omega) = \frac{1+j\omega T}{T}\left(\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega}\right)^2$$

$$\left|H_{BO'1}(j\omega)\right| = T\sqrt{1+\frac{4\pi^2\omega^2}{\omega_s^2}}\left(\frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{\pi\omega/\omega_s}\right)^2$$

$$\angle H_{BO'1}(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{2\pi\omega}{\omega_s}\right) - \frac{2\pi\omega}{\omega_s}$$

Transformation bilinéaire (Tustin)

- Du plan-*z* au plan-*s* :

$$z = e^{Ts} = \frac{e^{Ts/2}}{e^{-Ts/2}} \approx \frac{1 + sT/2}{1 - sT/2}$$

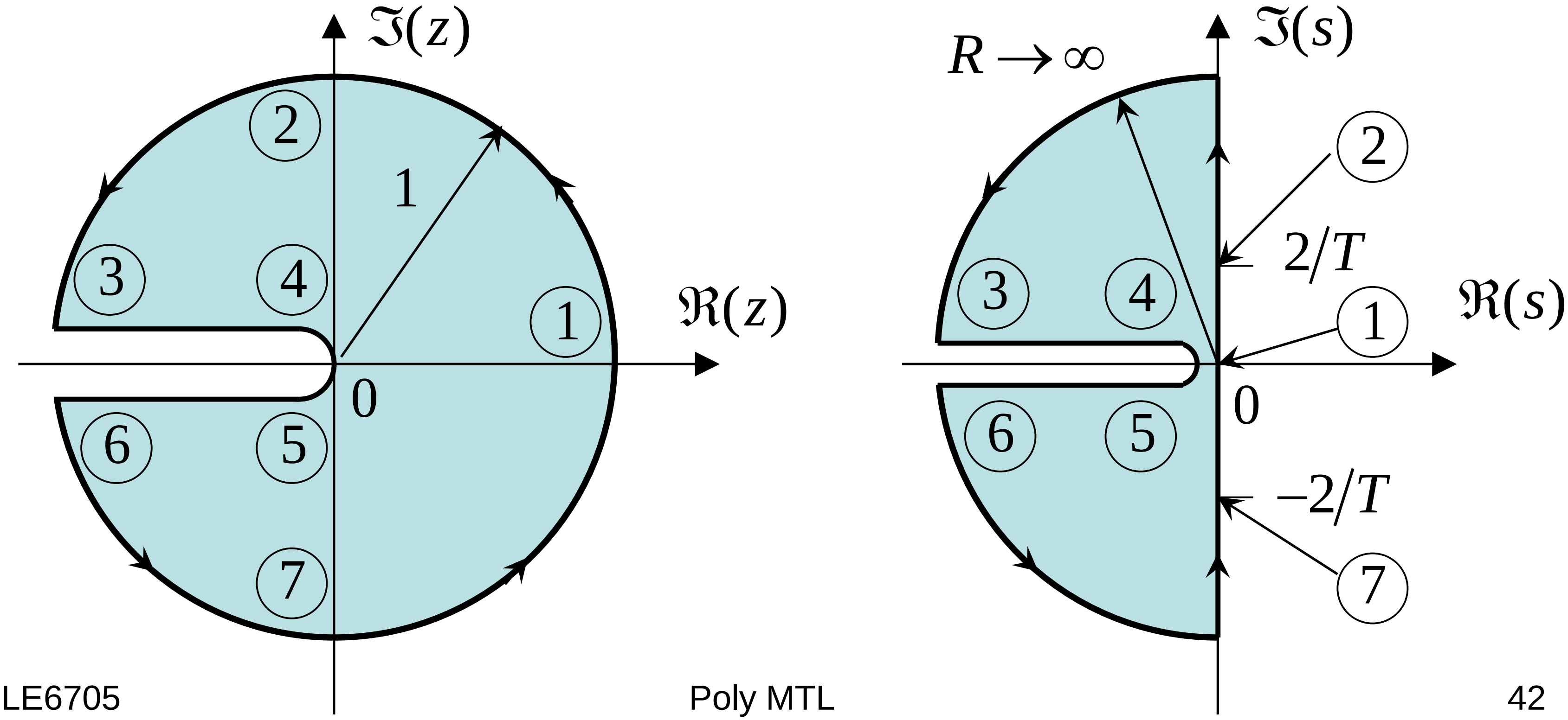
- Du plan-*s* au plan-*z* :

$$\begin{aligned}
s &= \frac{1}{T}\ln z \\
&= \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \cdots\right) \\
&\approx \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}
\end{aligned}$$

Transformation bilinéaire

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\bigg|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{2}{T}\frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1} = \frac{2}{T}\frac{e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2}+e^{-j\omega T/2}}$$

$$= j\frac{2}{T}\tan(\omega T/2) = j\frac{2}{T}\frac{\sin(\omega T/2)}{\cos(\omega T/2)}$$



- **Remarque :** Transformation de Tustin n'est pas définie à $z = 1$ et la transformation se comporte mal pour z près de 1.
- **Exemple :** Transformée inverse

$$H(z) = \frac{z - 0.5}{z^2 + z + 0.3}, T = 0.1s$$

```
Hd = tf([1 -0.5], [1 1 0.3],0.1);
Hc1 = d2c(Hd, 'zoh');
Hc2 = d2c(Hd, 'tustin');
```

$$H_{c1}(s) = \frac{83.32s + 168.8}{s^2 + 12.04s + 776.7}$$

$$H_{c2}(s) = \frac{-5s^2 + 66.67s + 666.7}{s^2 + 93.33s + 3067}$$

Distorsion fréquentielle et pré-distorsion

$$s = j\frac{2}{T}\tan(\omega T/2) \rightarrow \omega_a = \frac{2}{T}\tan(\omega T/2)$$

- Distorsion fréquentielle (frequency warping) : un système se comporte à ω comme son homologue en temps continu à ω_a.
- Pré-distorsion (pre-warping) : compenser la distorsion par appliquer une transformation la fréquence en question (e.g. fréquence de coupure) :

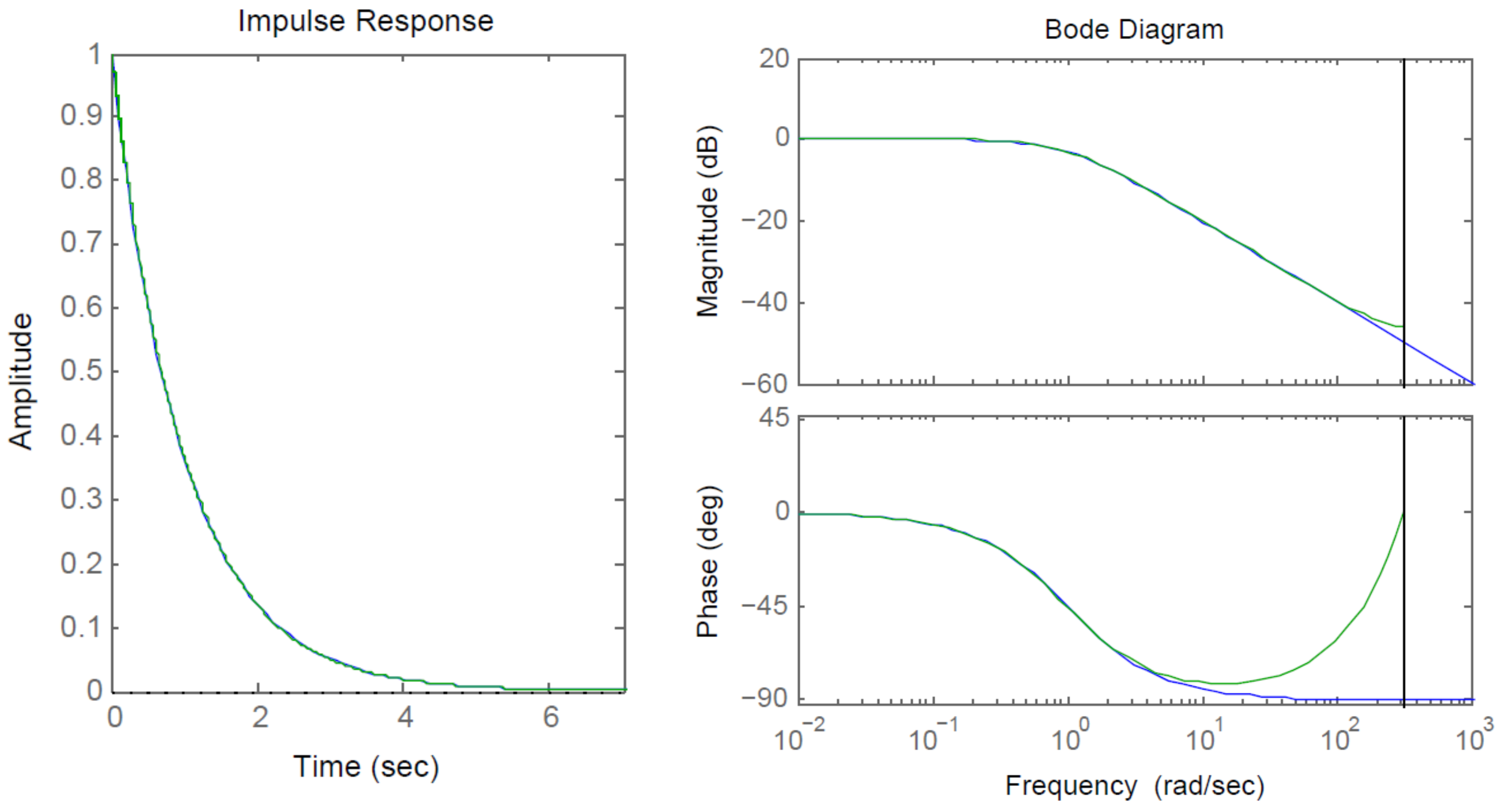
$$\omega_a = \frac{2}{T}\tan(\omega T/2)$$

- **Remarque :**

$$\omega_a = \lim_{T\rightarrow 0}\frac{2}{T}\tan(\omega T/2) = \frac{2}{T}\frac{\omega T}{2} = \omega$$

Invariance de la réponse impulsionnelle

- Reproduire la réponse impulsionnelle du système en temps continu par un système en temps discret.
- **Exemple :** discrétiser $H(s) = 1/(s+1)$



Discrétisation de FdT en *s* avec Matlab

- sysd = c2d(sysc, Ts, method)
- The string method selects the discretization method among the following:

'zoh'	Zero-order hold on the inputs
'foh'	Linear interpolation of inputs (triangle appx.)
'imp'	Impulse-invariant discretization
'tustin'	Bilinear (Tustin) approximation
'prewarp'	Tustin approximation with frequency prewarping. The critical frequency Wc (in rad/sec) is specified as fourth input by sysd = c2d(sysc,Ts, 'prewarp', Wc)
'matched'	Matched pole-zero method (for SISO systems only).

- **Exemple :** $T = 0.1$ s

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 + 4s + 5}$$

```
H = tf([1 1], [1 4 5]);
Hd1 = c2d(H, 0.1, 'zoh');
Hd2 = c2d(H, 0.1, 'tustin');
Hd3 = c2d(H, 0.1, 'prewarp',1);
```

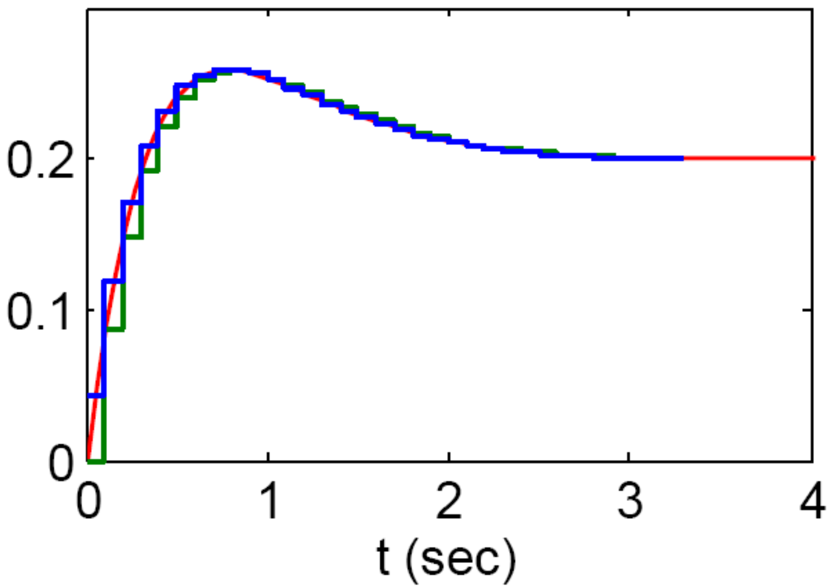
$$H_{d1}(z) = \frac{0.08611z - 0.07791}{z^2 - 1.629z - 0.6703}$$

$$H_{d2}(z) = \frac{0.0433z^2 + 0.004124z - 0.03918}{z^2 - 1.629z - 0.6701}$$

$$H_{d3}(z) = \frac{0.0433z^2 + 0.00413z - 0.0392}{z^2 - 1.629z - 0.6699}$$

- **Exemple :** $T = 0.1$ s

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 + 4s + 5}$$




```
H = tf([1 1], [1 4 5]);
Hd1 = c2d(H, 0.1, 'zoh');
Hd2 = c2d(H, 0.1, 'tustin');
```

$$H_{d1}(z) = \frac{0.08611z - 0.07791}{z^2 - 1.629s + 0.6703}$$

$$H_{d2}(z) = \frac{0.0433z^2 + 0.004124z + 0.03918}{z^2 - 1.629s + 0.6703}$$

- Discrétisation des fonctions de transfert par pôles-zéros matching
  - Calculer les pôles et les zéros

$$z = e^{Ts} : s_p \Leftrightarrow z_p = e^{Ts_p}, s_0 \Leftrightarrow z_0 = e^{Ts_0}$$

  - Calculer les zéros à l'infinie (n-m > 0)

$$s_0 = \infty \Rightarrow j\omega \to \infty \Rightarrow \begin{cases} z_0 = \infty \text{ (retard d'une periode)} \\ z_0 = e^{j\pi} = -1 \text{ (sans retard)} \end{cases}$$

  - Ajuster le gain stationnaire (le plus utilisé et par défaut) ou à une fréquence quelconque (une spécification particulière).

Exemple :

$$G(s) = K_c \frac{s+a}{s+b} \Rightarrow H(z) = K_d \frac{z - e^{-aT}}{z - e^{-bT}}$$

$$G(0) = K_c \frac{a}{b} = H(1) = K_d \frac{1 - e^{-aT}}{1 - e^{-bT}} \Rightarrow K_d = K_c \frac{a(1 - e^{-bT})}{b(1 - e^{-aT})}$$

Exemple :

$$G(s) = K_c \frac{s+a}{s(s+b)} \Rightarrow H(z) = K_d \frac{(z+1)(z - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-bT})}$$

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} sG(s) = K_c \lim_{s \to 0} s \frac{s+a}{s(s+b)} = K_c \frac{a}{b}$$

$$x_s(\infty) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) H(z) = 2K_d \frac{1 - e^{-aT}}{1 - e^{-bT}}$$

$$K_d = K_c \frac{a(1 - e^{-aT})}{2b(1 - e^{-bT})}$$