ELE 6705
Traitement numérique

des signaux

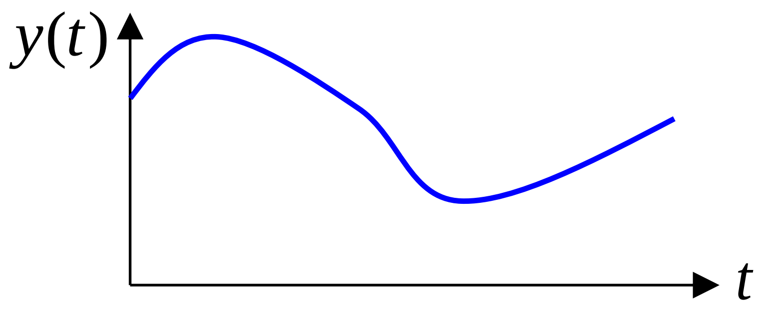
Hassan Bensalah

Chap. I : Signaux et Systèmes Discrets

Sujets abordés

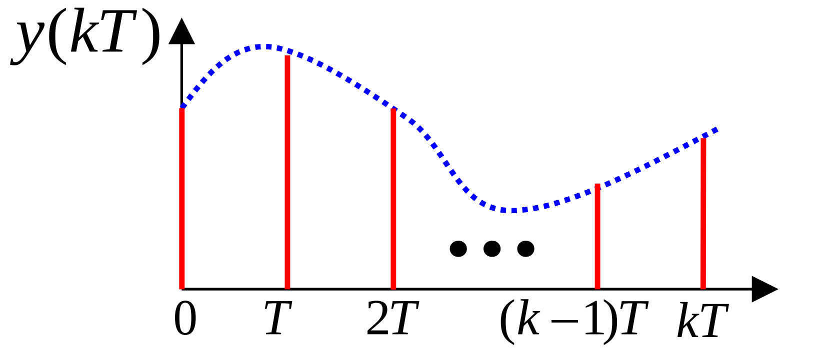
- Séquences
- Quantification
- Systèmes en temps discret et propriétés essentielles
- Équations de différences

- Systèmes en temps continu :



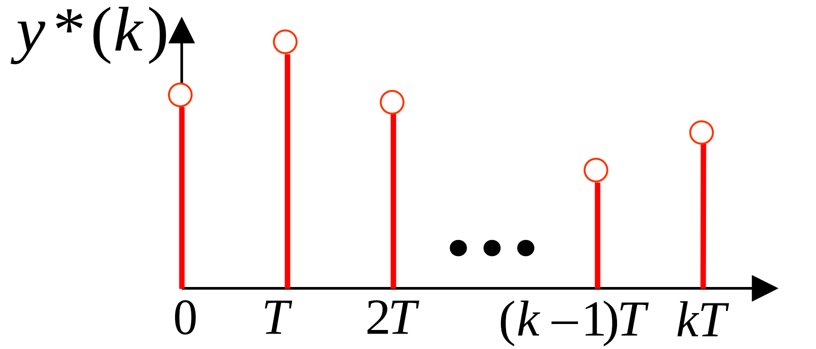
  $y(t)$ est une fonction temporelle continue en temps et en amplitude.

- Systèmes en temps discret :



  $\{y(kT)\}$ est une séquence discrète en temps, mais continue en amplitude.

- Systèmes numériques :

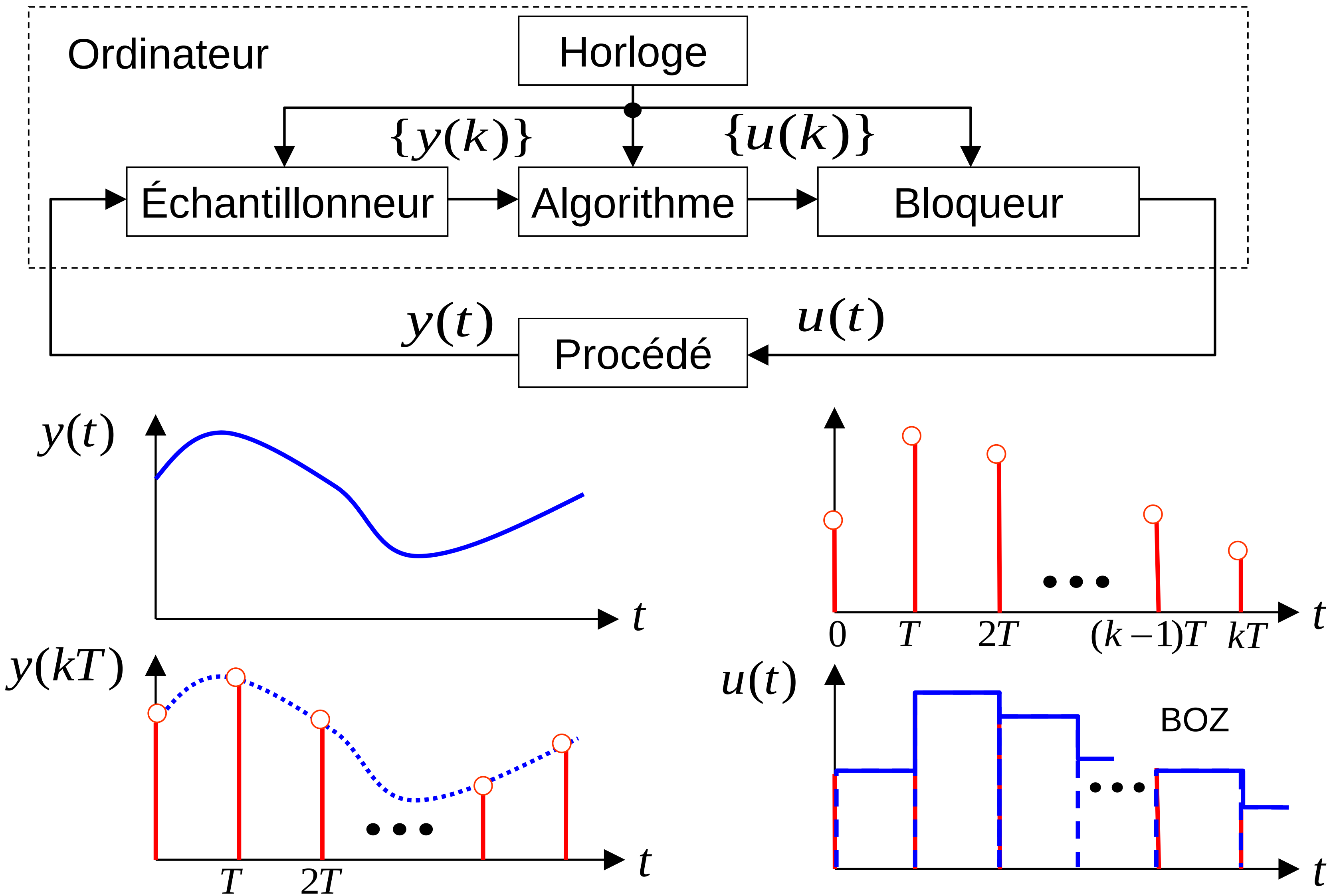


  $\{y^*(kT)\}$ est discret en temps et en amplitude.

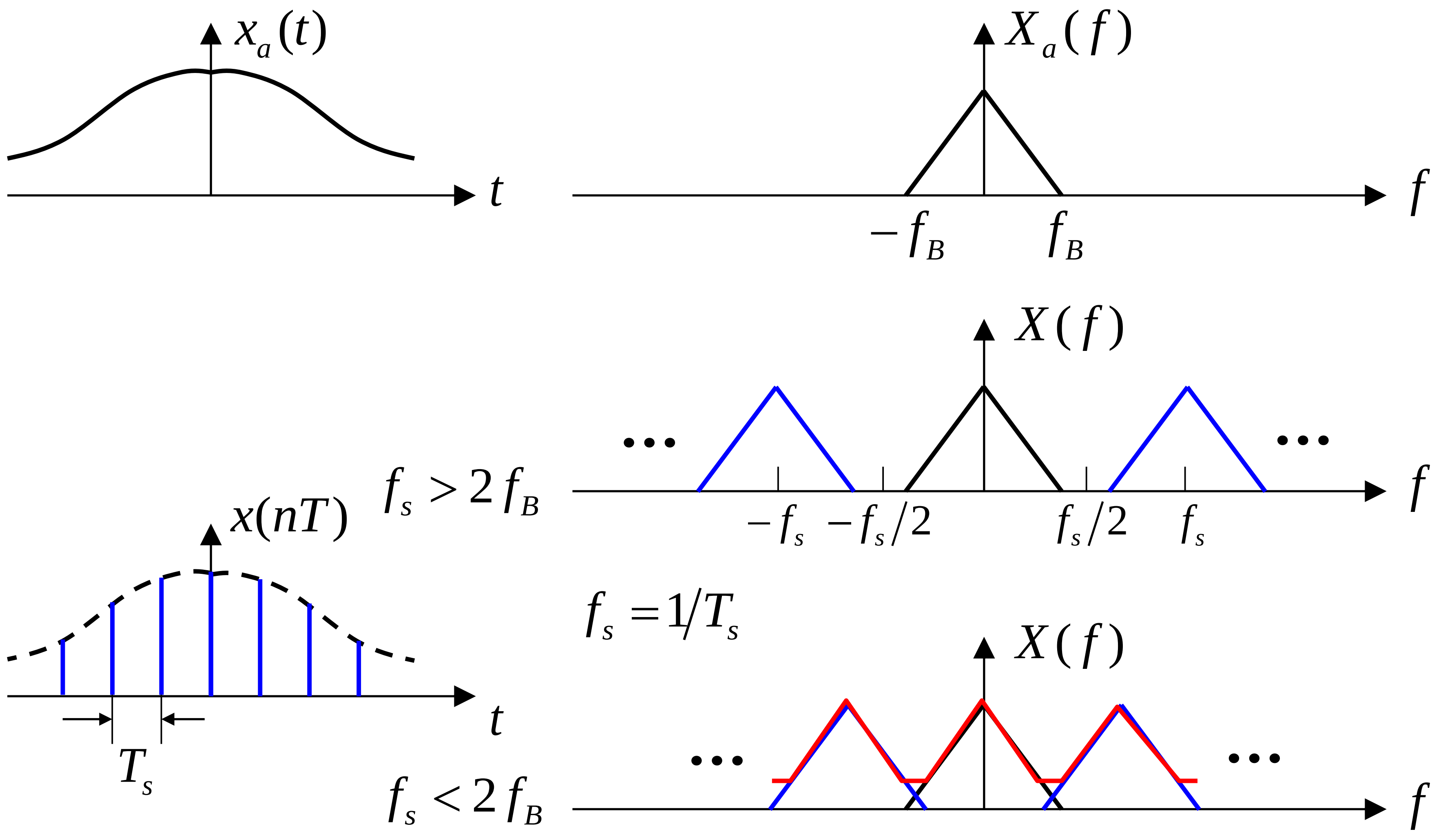
  –Discrétisation temporelle : échantillonnage

  –Discrétisation en amplitude : quantification

Discrétisation : échantillonnage et blocage



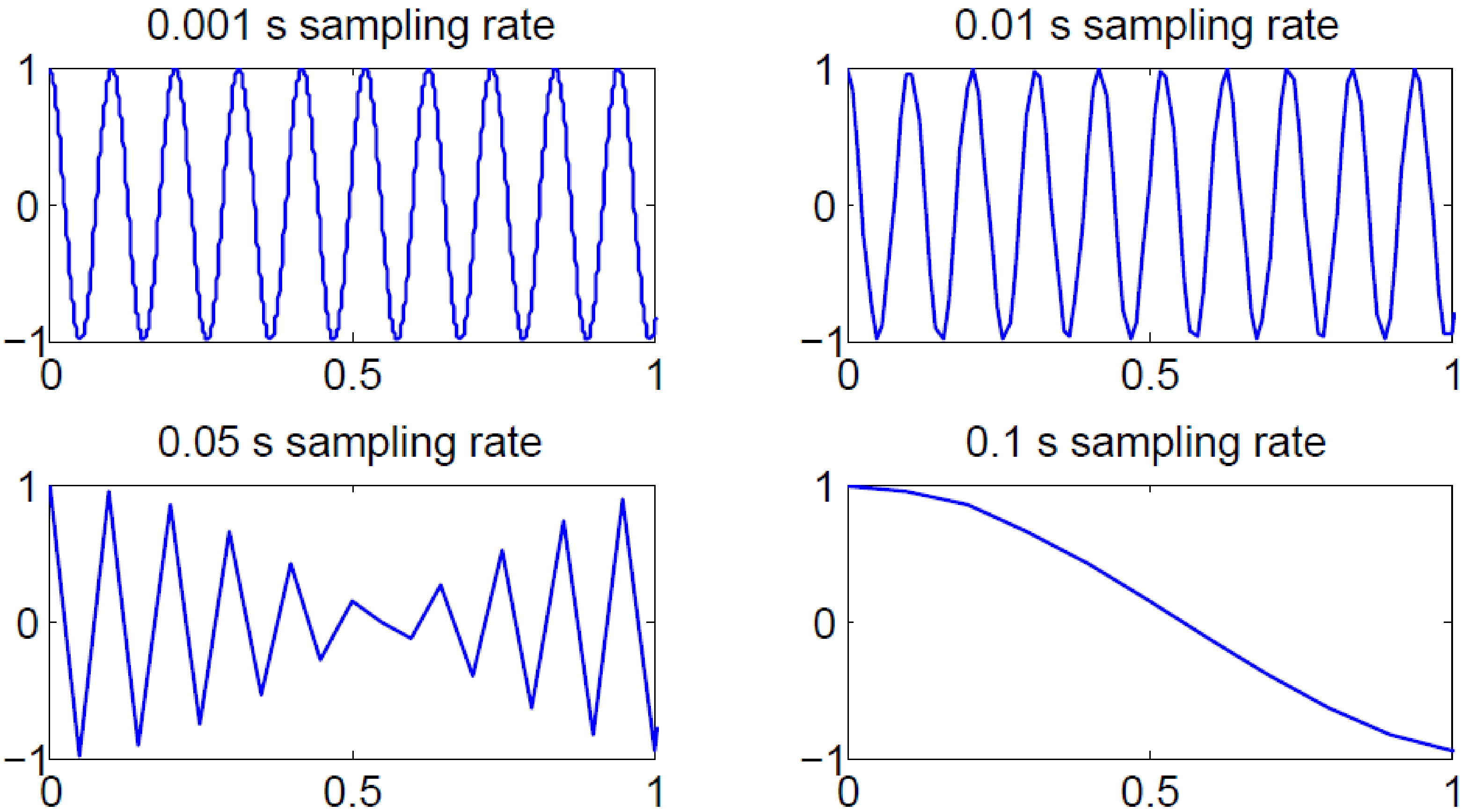
Choix de la fréquence d'échantillonnage



Effet de repliement

- **Exemple :** échantillonner le signal

$$x(t) = \cos(60t), \quad f_0 = 9.55\text{Hz}$$



Théorème de Nyquist-Shannon

- Notations
  - Fréquence d'échantillonnage : $f_s = 1/T_s$
  - Largeur de bonde : f_B
  - Taux de Nyquist : $2f_B$
  - Fréquence de Nyquist : $f_N = f_s/2$
- **Théorème d'échantillonnage** : si un signal analogique a un spectre s'étendant jusqu'à une fréquence f_B et si la fréquence d'échantillonnage est au moins deux fois plus grande que f_B ($f_s > 2f_B$ ou $f_N > f_B$), les versions répétées dans la domaine de fréquence ne se recouvriront pas. Il est donc possible de reconstruire le signal original (analogique) de manière exacte

Théorème d'échantillonnage

- Fréquence critique : Dans le théorème d'échantillonnage

$$f_s > 2f_B \; (f_N > f_B)$$

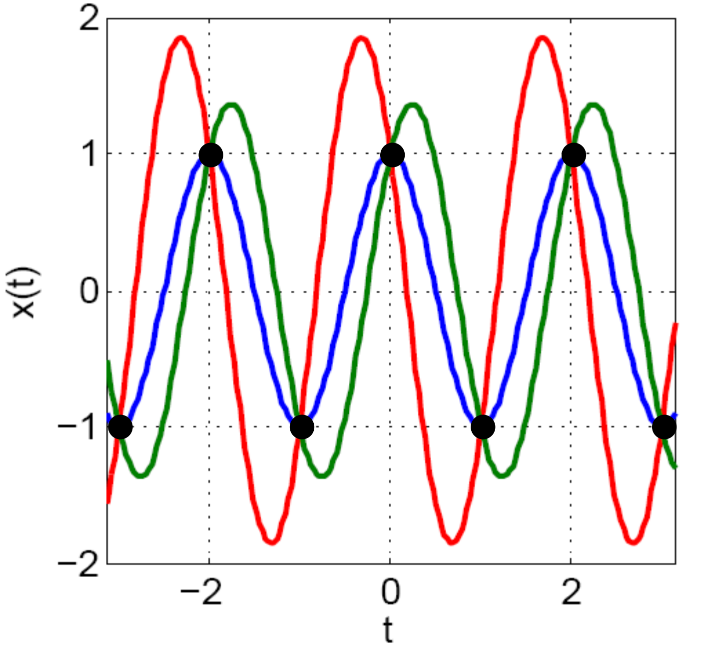
- l'inégalité est stricte. Sinon, il se peut que la reconstruction ne puisse pas se faire correctement.

Exemple : considérons une séquence

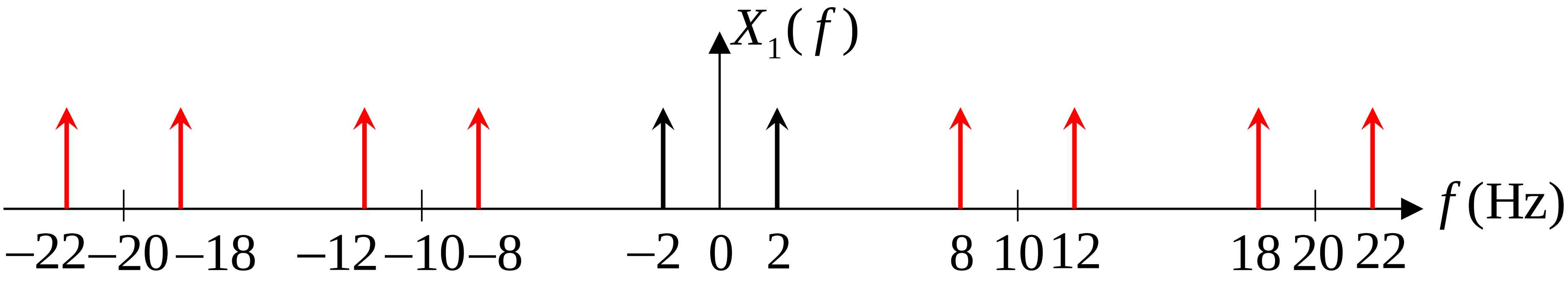
$$x(t) = \frac{1}{\cos(\theta)} \cos\left(2\pi \frac{f_s}{2} t + \theta\right)$$

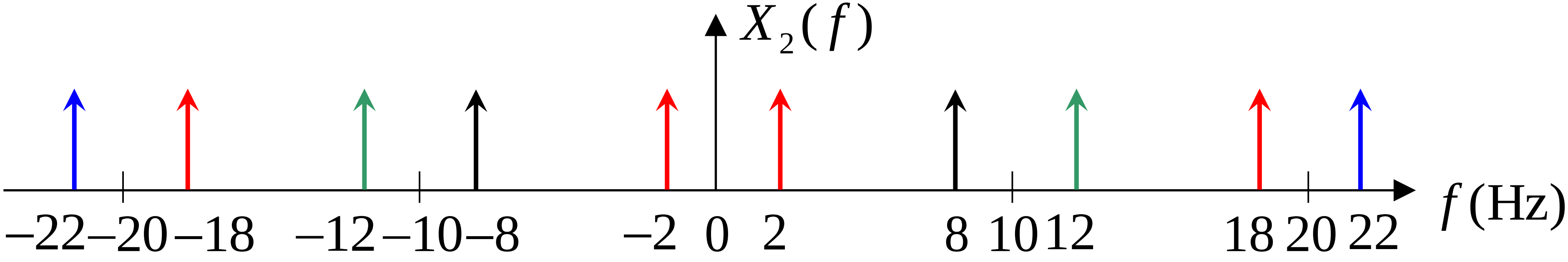
$$x(nT) = \cos(\pi n) = (-1)^n$$

quel que soit θ.

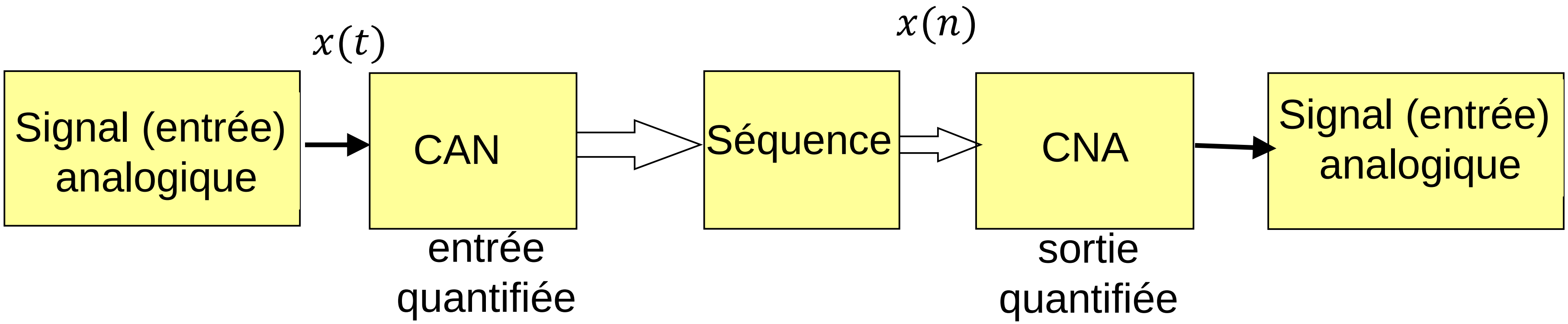


- **Exemple :** Discrétiser 2 signaux sinusoïdaux de 2Hz et 8Hz, respectivement, avec la même fréquence d'échantillonnage de 10Hz



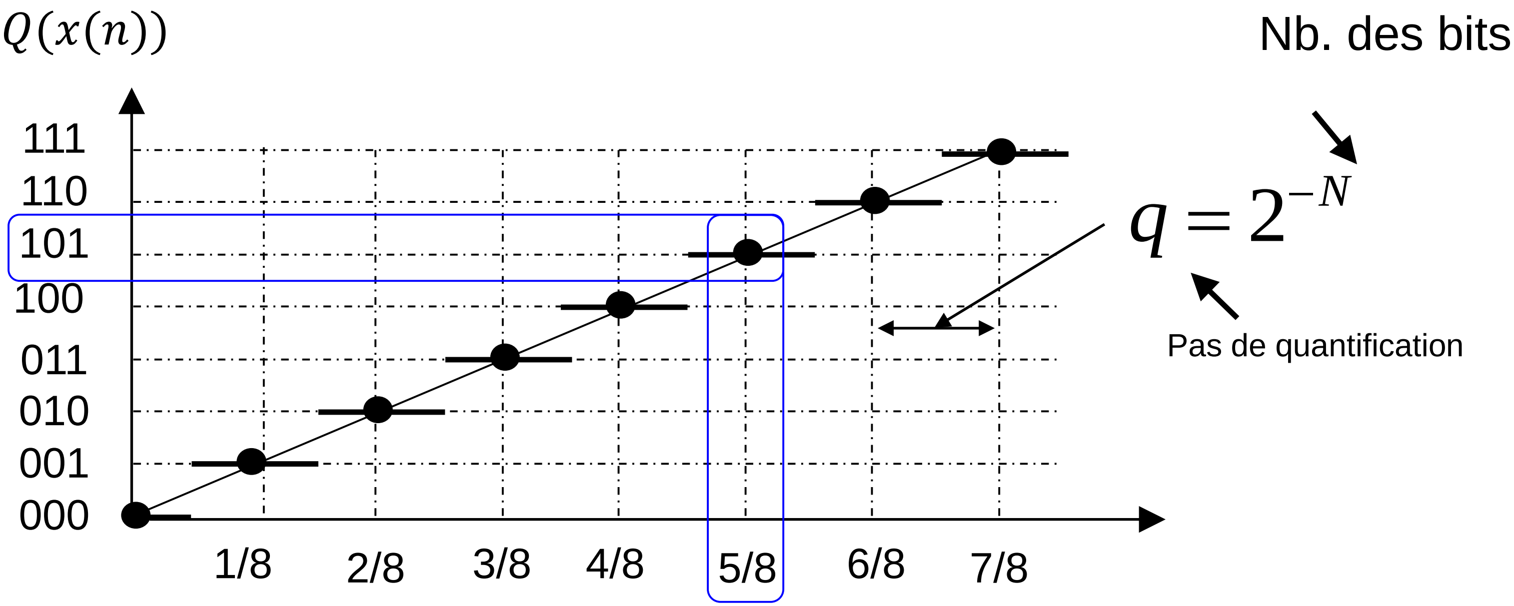


Quantification

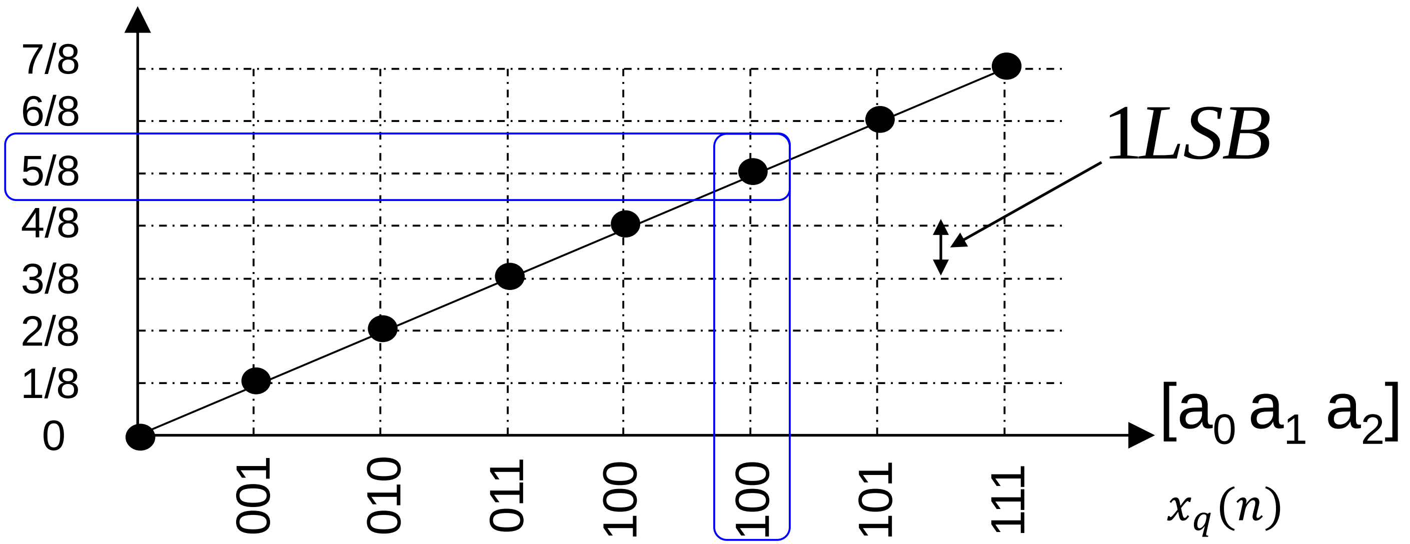


$$x_q(n) = Q(x(n))$$

CAN



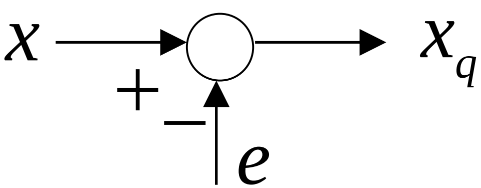
CNA

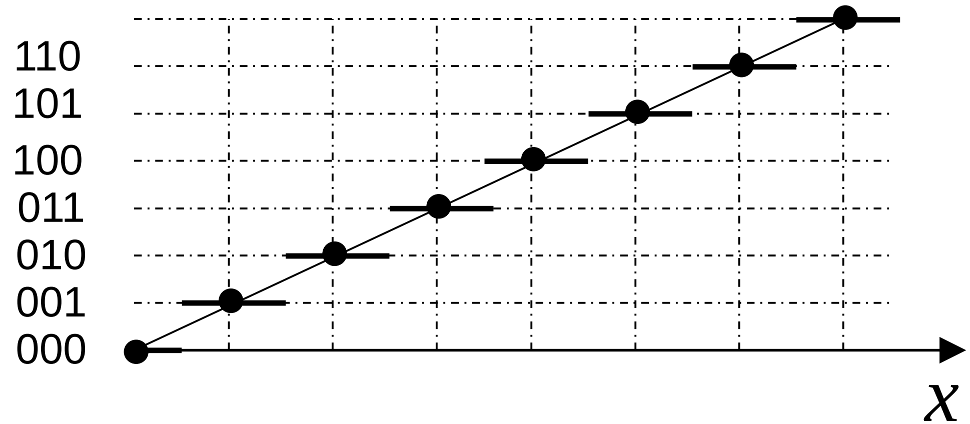


Erreur de quantification

Modèle de l'erreur de quantification

$$\boldsymbol{x = x_q + e}$$

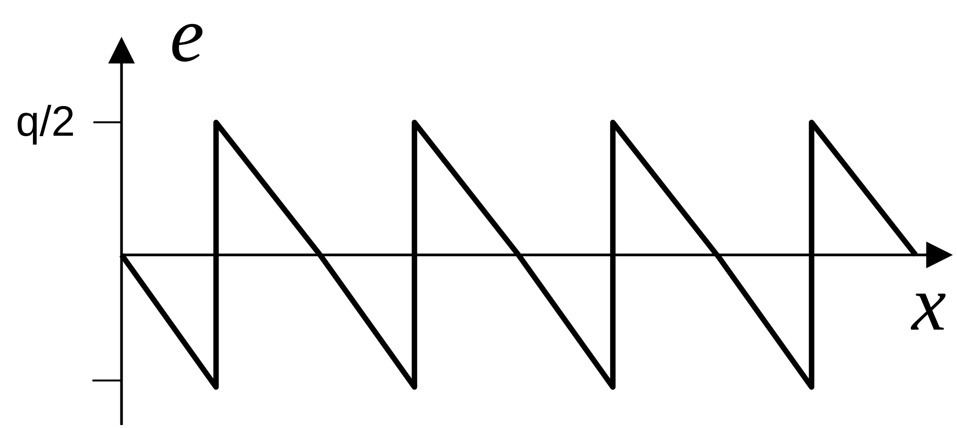




- Troncature par arrondi

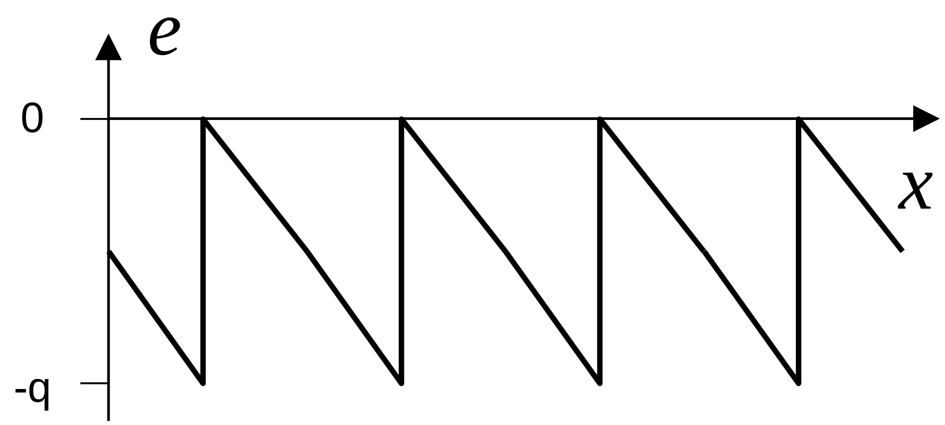
$$x = x_q + e = Nq + e$$

$$\left(N - \frac{1}{2}\right)q \le x \le \left(N + \frac{1}{2}\right)q$$



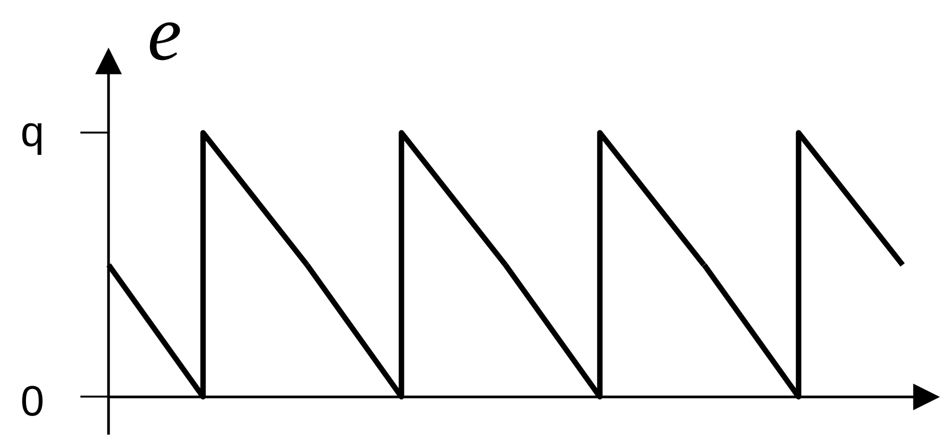
- Troncature par excès

$$x = x_q + e = Nq + e$$
$$Nq \le x \le (N+1)q$$

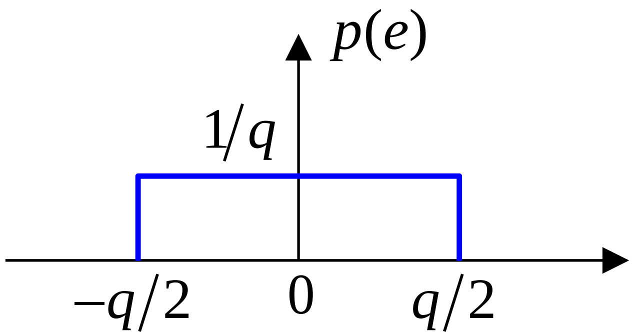


- Troncature par défaut

$$x = x_q + e = Nq + e$$
$$\left(N-1\right)q \le x \le Nq$$



- Bruit de quantification : quantification par arrondi
  –La densité de probabilité du signal *e* est uniforme entre –$q/2$ et $q/2$:



Modèle souvent acceptable

$|e(n)|_{max} = {}^{q}/_{2}$

–L'erreur de quantification *e* est un bruit blanc;

–les signaux $x(n)$ *et* $e(n)$ ne sont pas corrélés.

Variance de l'erreur de quantification :

$$\sigma_e^2 = \int_{-q/2}^{q/2} e^2 p(e) de = \int_{-q/2}^{q/2} e^2 \frac{1}{q} de = \frac{q^2}{12}$$

$$= 2^{-2N}/3$$

- Rapport signal sur bruit (SNR)

Typiquement, pour un signal sinusoïdal quantifié uniformément par arrondi et sans écrêtage sur *N* bits :

$$-2^{N-1}q \le x \le 2^{N-1}q$$

$$\frac{P_x}{P_e} = \frac{\left(2^{N-1}q\right)^2 \big/ 2}{q^2 \big/ 12} = \frac{3}{2}2^{2N}$$

Exemple : pour un 16 bits convertisseur

$$SNR_{\max} = 10\log\left(P_x / P_e\right) = 6N + 1.76\,[\mathrm{dB}]$$

Système Discrets

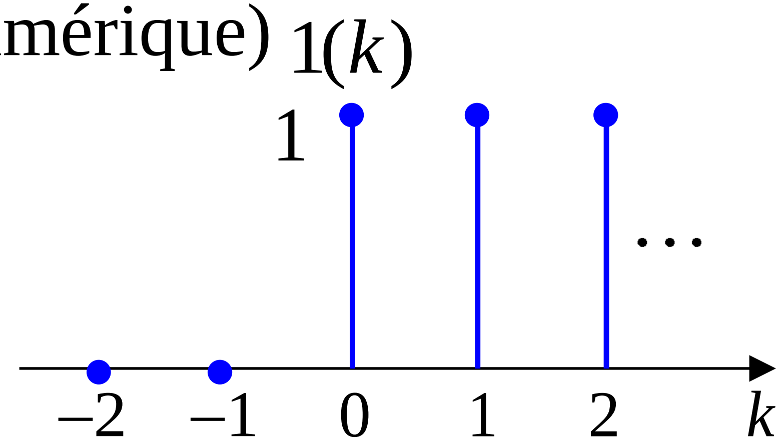
Algorithme:(système discret ou filtre numérique)

- Caractérisés par $h(n)$ leur réponse impulsionnelle: Sortie quand le signal d'entrée est une impulsion de Dirac δ;

- Filtres linéaires et stationnaires(LTI)

Échelon unitaire et impulsion de Dirac

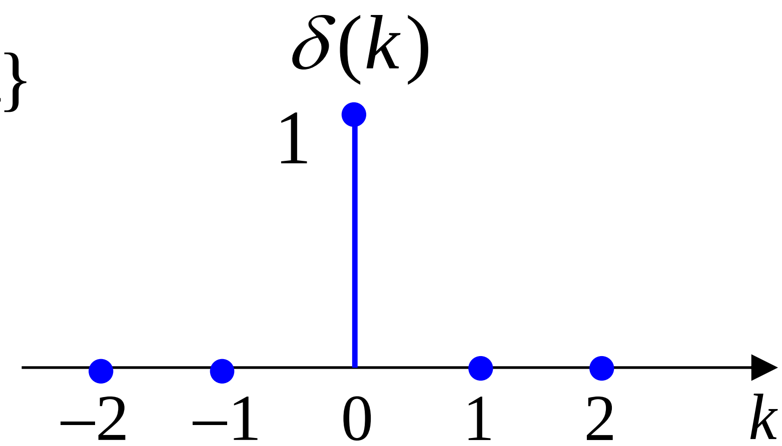
- Échelon unitaire(échelon numérique)



$$1(k) = \{\ldots, 1(-1), 1(0), 1(1), \ldots\}$$

$$1(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k \geq 0 \end{cases}$$

- Impulsion de Dirac(impulsion numérique)



$$\delta(k) = \{\ldots, \delta(-1), \delta(0), \delta(1), \ldots\}$$

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k)\delta(n-k)$$

Modèle entrée / sortie

- Forme générale d'un système linéaire stationnaire (LTI) en temps discret

Signaux d'entrée et de sortie :

$$\{u(0), u(1), \ldots, u(N-1)\} \rightarrow U = \left(u(0)\; u(1) \cdots u(N-1)\right)^T$$

$$\{y(0), y(1), \ldots, y(N-1)\} \rightarrow Y = \left(y(0)\; y(1) \cdots y(N-1)\right)^T$$

Relation d'entrée et de sortie :

$$Y = \bar{H}U + y_0,\ \bar{H} \in \mathbf{R}^{N\times N}\ ,\ y_0 : \text{condition initiale}$$

$$y(N) = \sum_{l=0}^{N} \bar{h}(N,l)u(l) + y_0 \quad \bar{h}(N,l) = h(N-l)$$

$h(k)$: « **fonction du système** ». Pour LTI :

- Pour une condition initiale nulle: $y_0 = 0$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k)h(n-k) = \underbrace{u(n) * h(n) = h(n) * u(n)}_{\text{Convolution numérique}}$$

- **Exemple :** un système à réponse limitée

$$\{u(k)\} = \{1, 2, 3\}, \ \{h(k)\} = \{4, 5, 6\}, \ y_0 = 0$$

$$y(0) = h(0)u(0) = 4$$

$$y(1) = h(1)u(0) + h(0)u(1) = 13$$

$$y(2) = h(2)u(0) + h(1)u(1) + h(0)u(2) = 28$$

$$y(3) = h(2)u(1) + h(1)u(2) = 27$$

$$y(4) = h(2)u(2) = 18$$

$$\{y(k)\} = \{4, 13, 28, 27, 18\}$$

Réponse impulsionelle

- Réponse impulsionelle

$$y(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k-l)\delta(l) = h(k)$$

- Réponse impulsionelle contient toute information concernant un système.
- La réponse d’un système à une entrée arbitraire peut être déterminée par sa réponse impulsionelle :

$$y(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k-l)u(l) = h(k) * u(k)$$

$$\{u(k)\} \longrightarrow \boxed{\{h(k)\}} \longrightarrow \{y(k)\}$$

Réponse à l'échelon

- Réponse à l'échelon unitaire

$$s(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k-l)1(l) = \sum_{l=0}^{\infty} h(k-l)$$

- La relation entre la réponse impulsionelle et celle à l'échelon

$$\delta(k) = 1(k) - 1(k-1)$$
$$\downarrow$$
$$h(k) = s(k) - s(k-1)$$

- Analogie aux systèmes en temps continu

$$u_0(t) = \frac{du_{-1}(t)}{dt} \leftrightarrow u_{-1}(t) = \int u_0(\tau)d\tau$$

Systèmes causaux

- Séquence causale :

$$s\{k\} = 0, \quad k < 0$$

- Système causale : la sortie du système ne dépend que des entrées dans le passé.
- Réponse impulsionelle d'un système LTI causal :

$$h\{k\} = 0, \quad k < 0$$

- Réponse d'un système LTI causal à une entrée causale

$$\begin{aligned} y(k) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k-l)u(l) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} h(k-l)u(l) \qquad (u(k) = 0, k < 0) \\ &= \sum_{l=0}^{k} h(k-l)u(l) \qquad (h(k) = 0, k < 0) \end{aligned}$$

•Équations aux différences

- Continus :

Equation différentielle

Système d'ordre 1 :

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t)$$

Cas général :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y$$
$$= u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0 u$$
$$m \le n$$

- Discrets :

Equation aux différences

Système d'ordre 1 :

$$y(k) + ay(k-1) = bu(k)$$

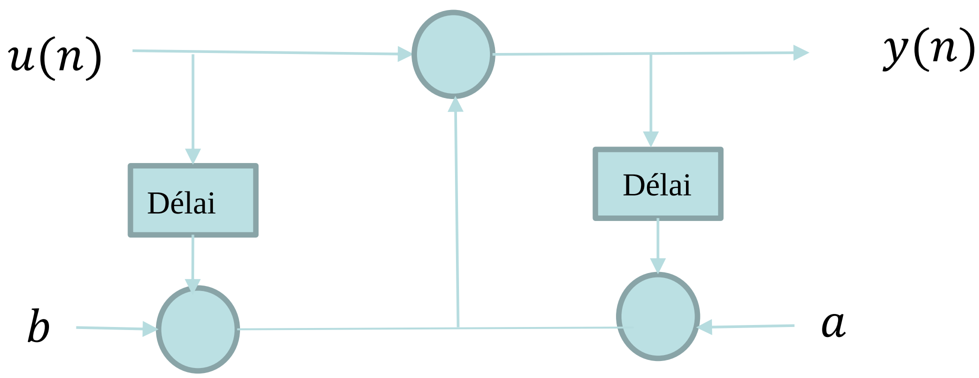
Cas général :

$$y(k) + a_{n-1}y(k-1) + \cdots + a_0 y(k-n)$$
$$= u(k) + b_{m-1}u(k-1) + \cdots + b_0 u(k-m)$$
$$m \le n$$

$$y(k) = \sum_{l=0}^{m} b_{m-l} u(k-l) + \sum_{i=1}^{n} a_{n-i} y(k-i), \qquad b_m = 1$$

- Exemple:

$$y(k) = u(k) + bu(k-1) + ay(k-1)$$



Soit $u(n) = \delta(n)$ avec C.I. nulles

$$h(n) = \delta(n) + b\delta(n-1) + ah(n-1)$$

$$\begin{cases} h(-1) = 0 + 0 + 0 = 0 \\ h(0) \quad = 1 + 0 + 0 = 1 \\ h(1) \quad = 0 + b + a = b + a \\ h(2) \quad = 0 + 0 + a(b+a) = a(b+a) \\ \vdots \\ h(n) = a^n 1(n) + ba^{n-1} 1(n-1) \end{cases}$$

Stable si $|a| < 1$