

# GLQ3205

## Géophysique appliquée 2

### Méthodes EM: Méthodes dans le temps

---

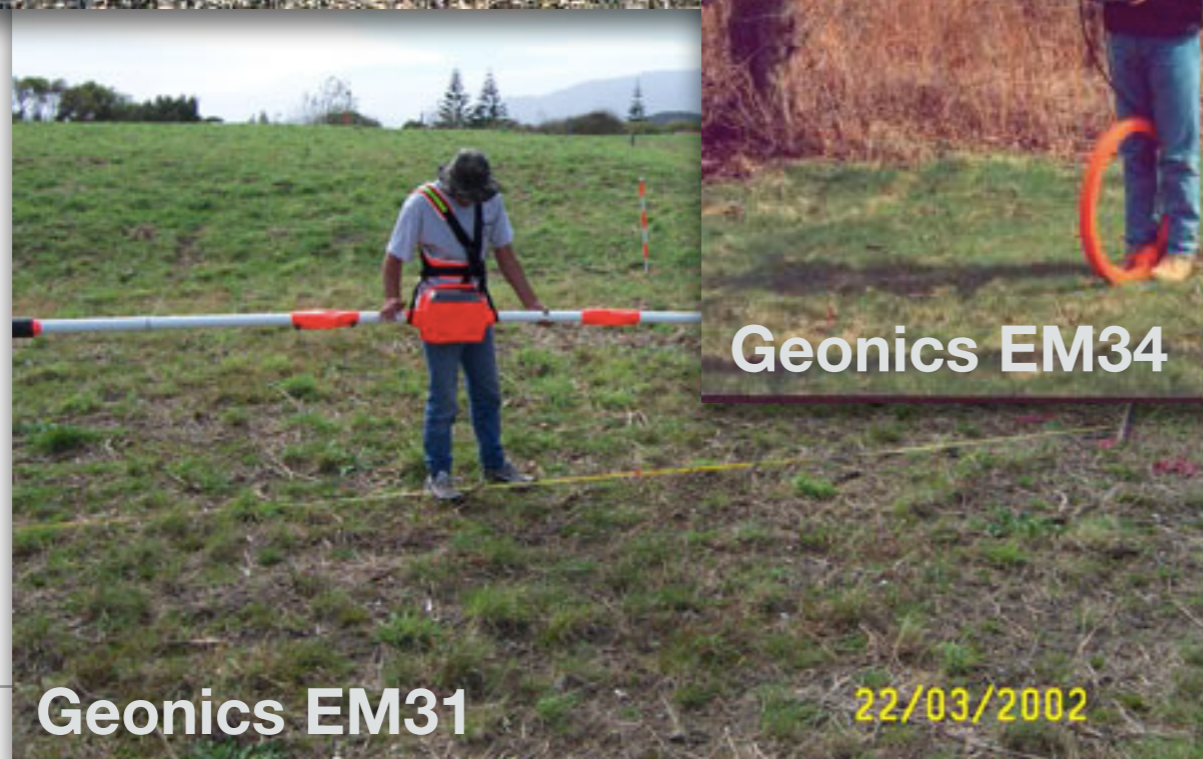
Ahmed Mhenni  
[ahmed.mhenni@polymtl.ca](mailto:ahmed.mhenni@polymtl.ca)

Été 2024

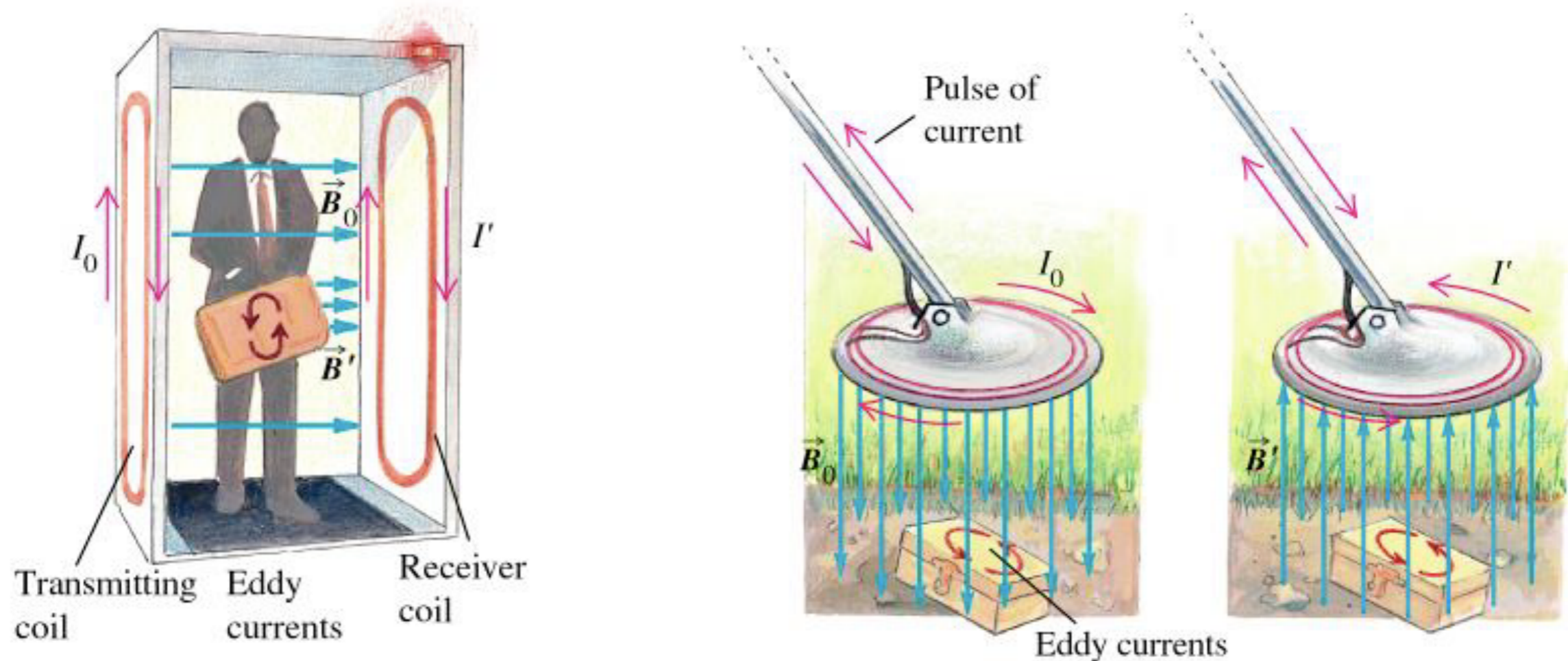
#### Plan du cours

1. Révision FEM
2. Principes de base
3. Sol hétérogène
4. Mise en oeuvre et interprétation
5. Étude de cas

# Systemes FEM dipolaires

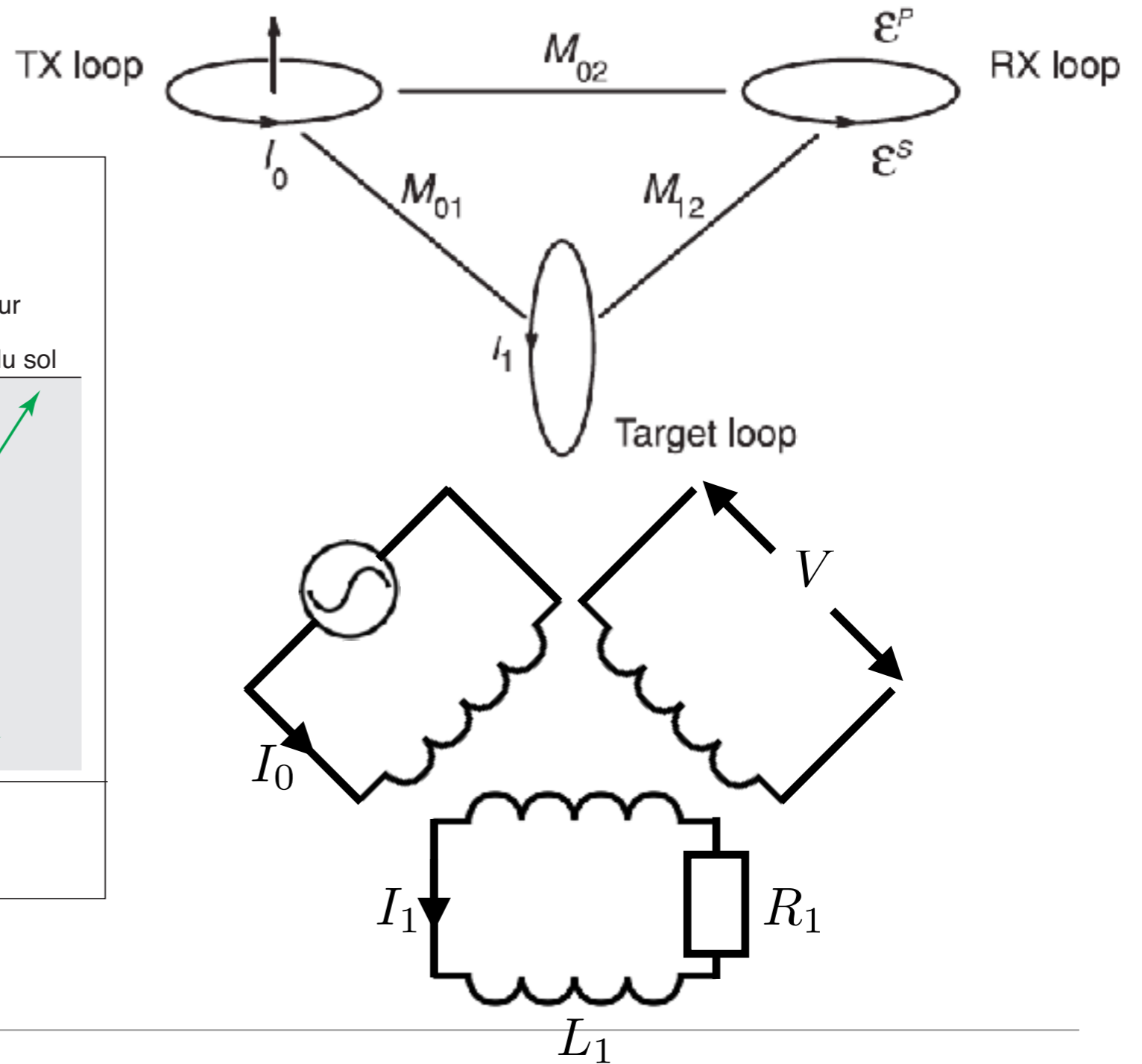
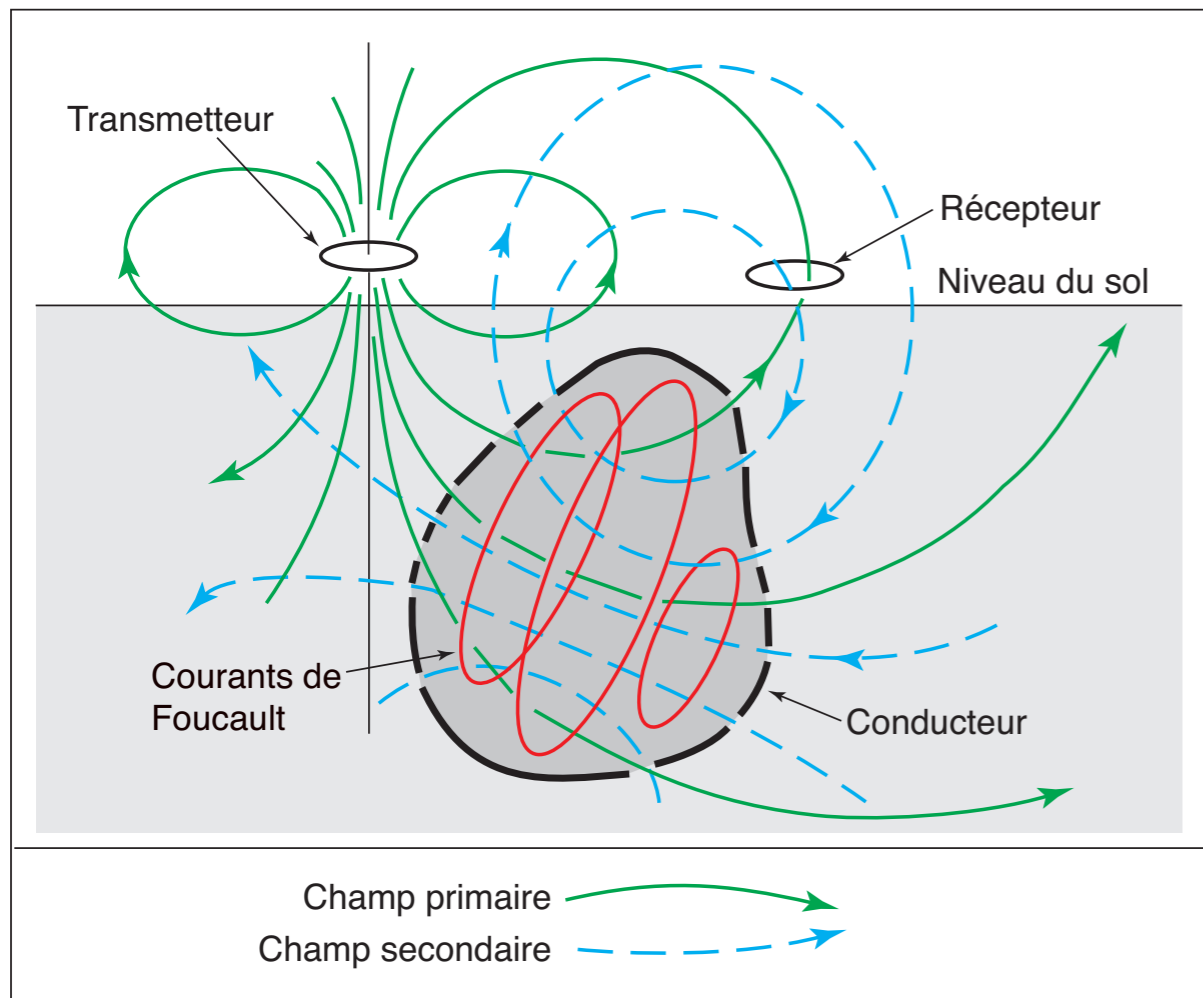


# Principe de base en EM



1. Une boucle transmet un champ magnétique primaire variant dans le temps
  - Ceci produit un courant dans un objet conducteur
2. Les courants de Foucault produisent un champ magnétique secondaire
  - Ceci produit un courant à la boucle réceptrice

# Circuit équivalent



# Réponse du circuit équivalent

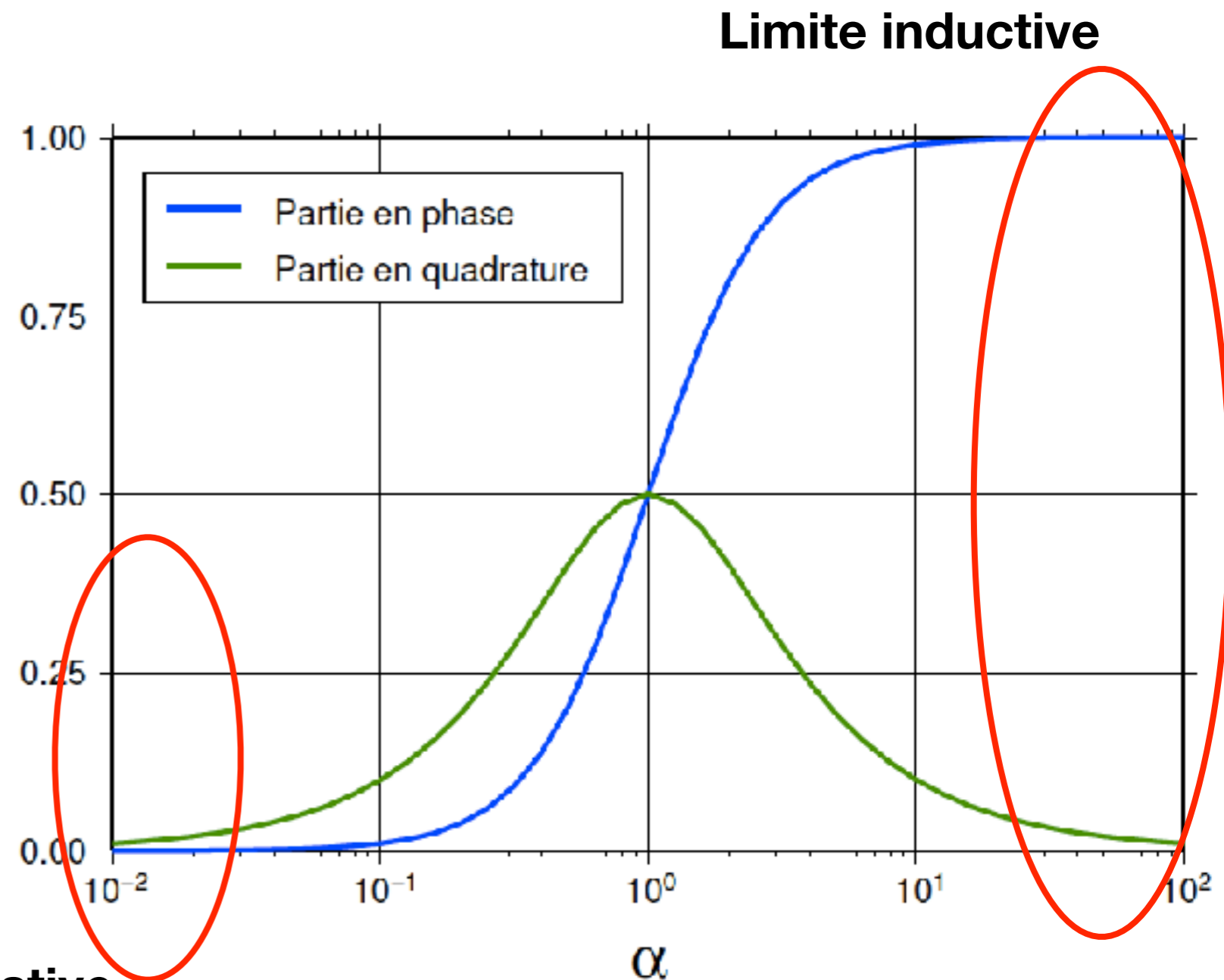
La réponse dépend du nombre d'induction:

$$\alpha = \frac{r}{\delta} = r \sqrt{\frac{\sigma \mu_0 \omega}{2}}$$

En général, le système est décrit par

$$\begin{aligned} \frac{H_s}{H_p} &= -G \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} e^{i\phi} \\ &= -GF(\alpha) e^{i\phi} \end{aligned}$$

**Limite résistive**



# Conductivimètre (limite résistive)

- La plupart des équipements au sol opèrent dans la limite résistive.
- La composante en quadrature est alors proportionnelle à la conductivité

$$\sigma_a = \frac{4}{\mu_0 \omega r^2} Q \left( \frac{H_s}{H_p} \right)$$

- La composante en phase est nulle.
- Les bons conducteurs sont détectés par une forte augmentation de la composante en phase.



Geonics EM34



Geonics EM38

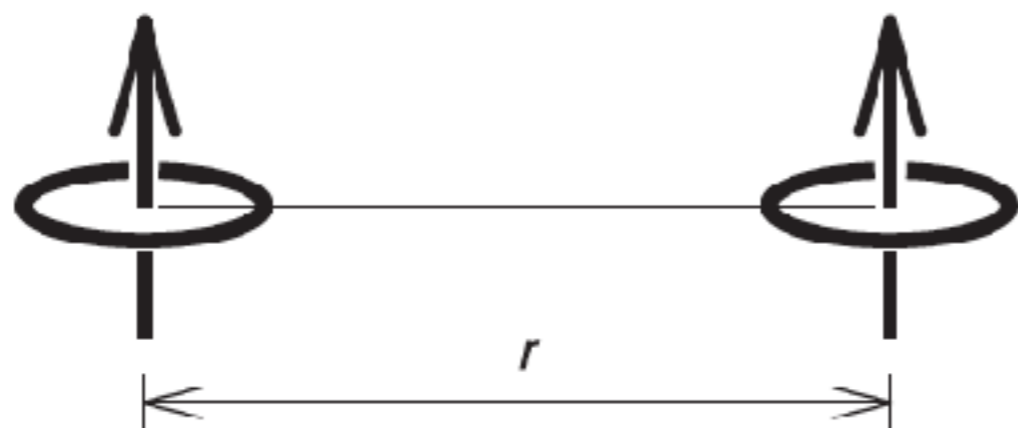


Geonics EM31

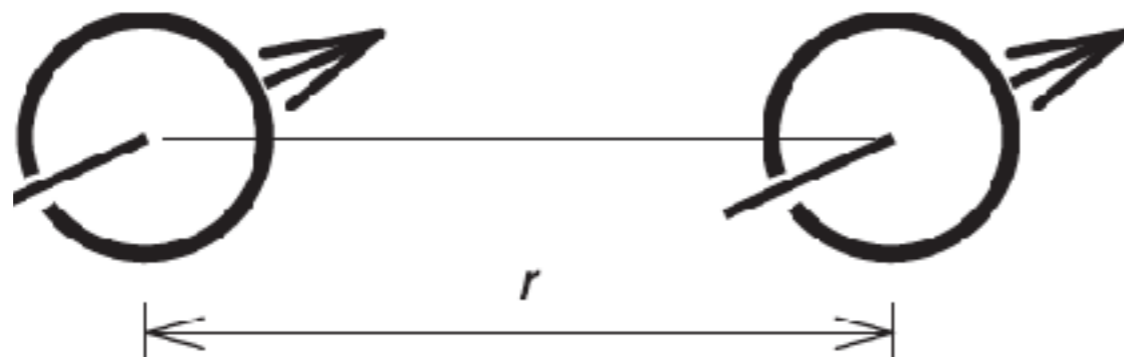
# Conductivité (limite résistive)

## Orientation des dispositifs:

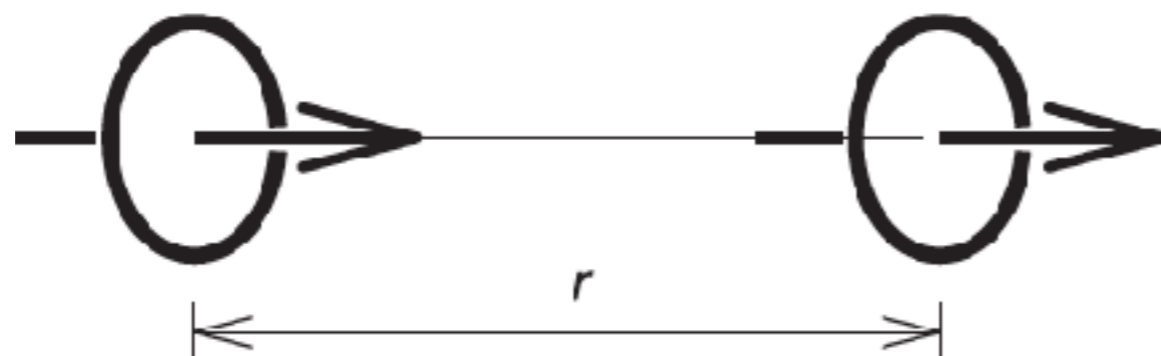
**Horizontal  
coplanaire  
(HCP)**



**Vertical  
coplanaire  
(VCP)**



**Vertical  
coaxial  
(VCX)**



Geonics EM34



Geonics EM38



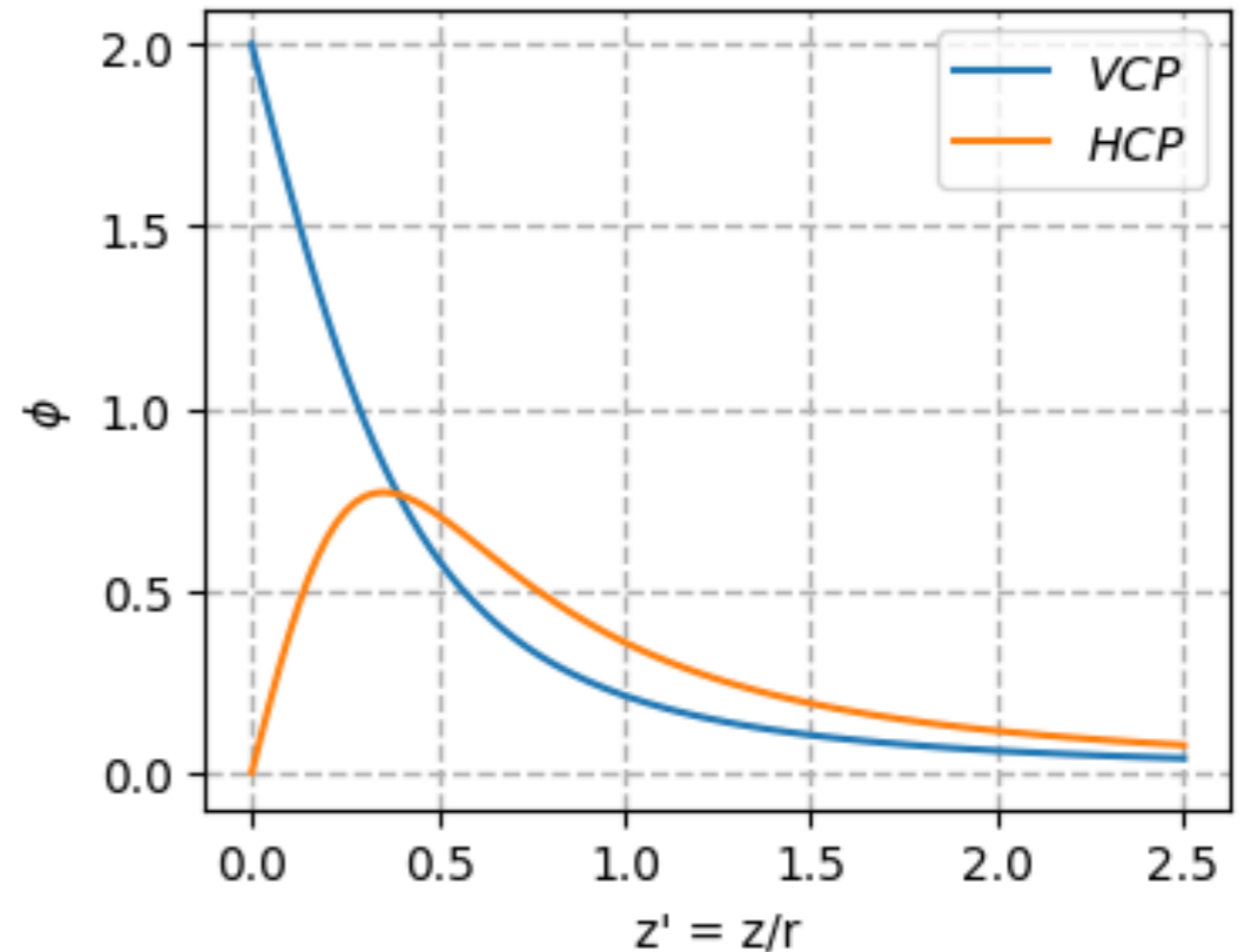
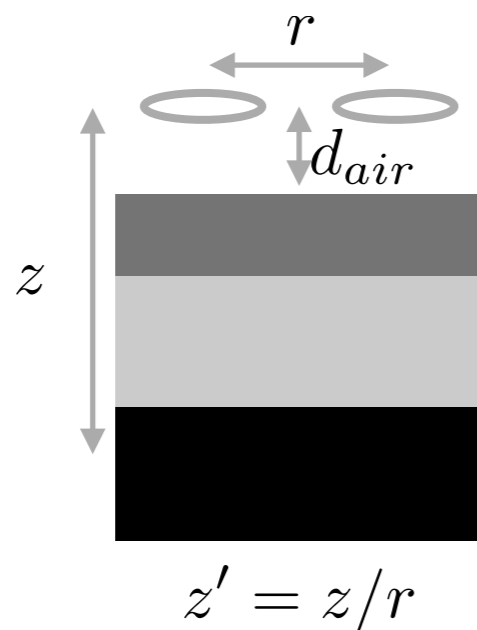
Geonics EM31

# Conductivimètre (limite résistive)

On peut utiliser la sensibilité pour calculer la résistivité apparente:

$$\rho_a = \int_0^{\infty} \phi(z') \sigma(z') dz'$$

Attention! L'intégration commence à la hauteur du dispositif!





# Conductivimètre (limite résistive)

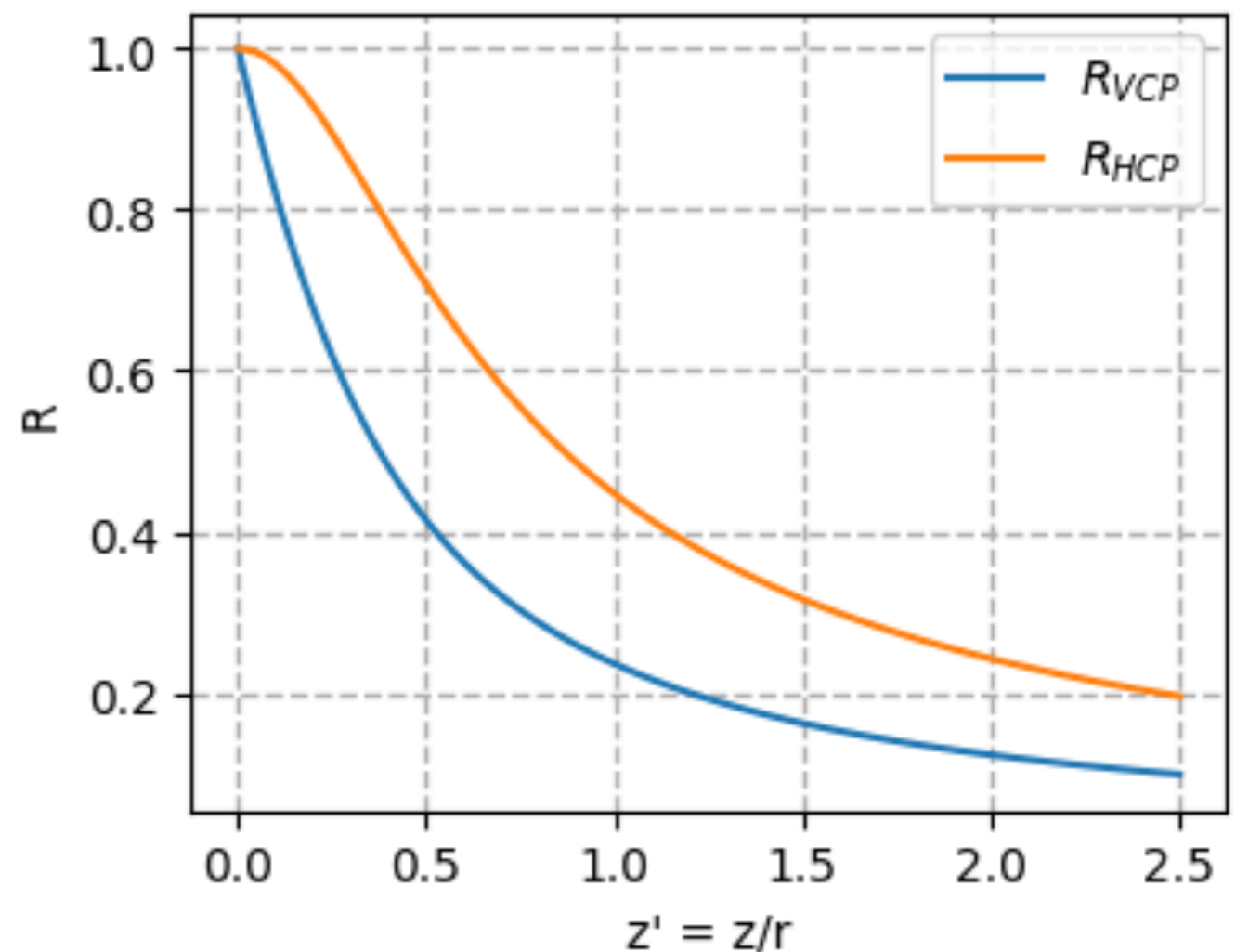
Pour faciliter les calculs, on utilise habituellement la courbe cumulative:

$$R(z') = \int_{z'}^{\infty} \phi(z') dz'$$

Ce qui donne:

$$R_{HCP} = \frac{1}{\sqrt{4z'^2 + 1}}$$

$$R_{VCP} = \sqrt{4z'^2 + 1} - 2z'$$



# Conductivitémètre (limite résistive)

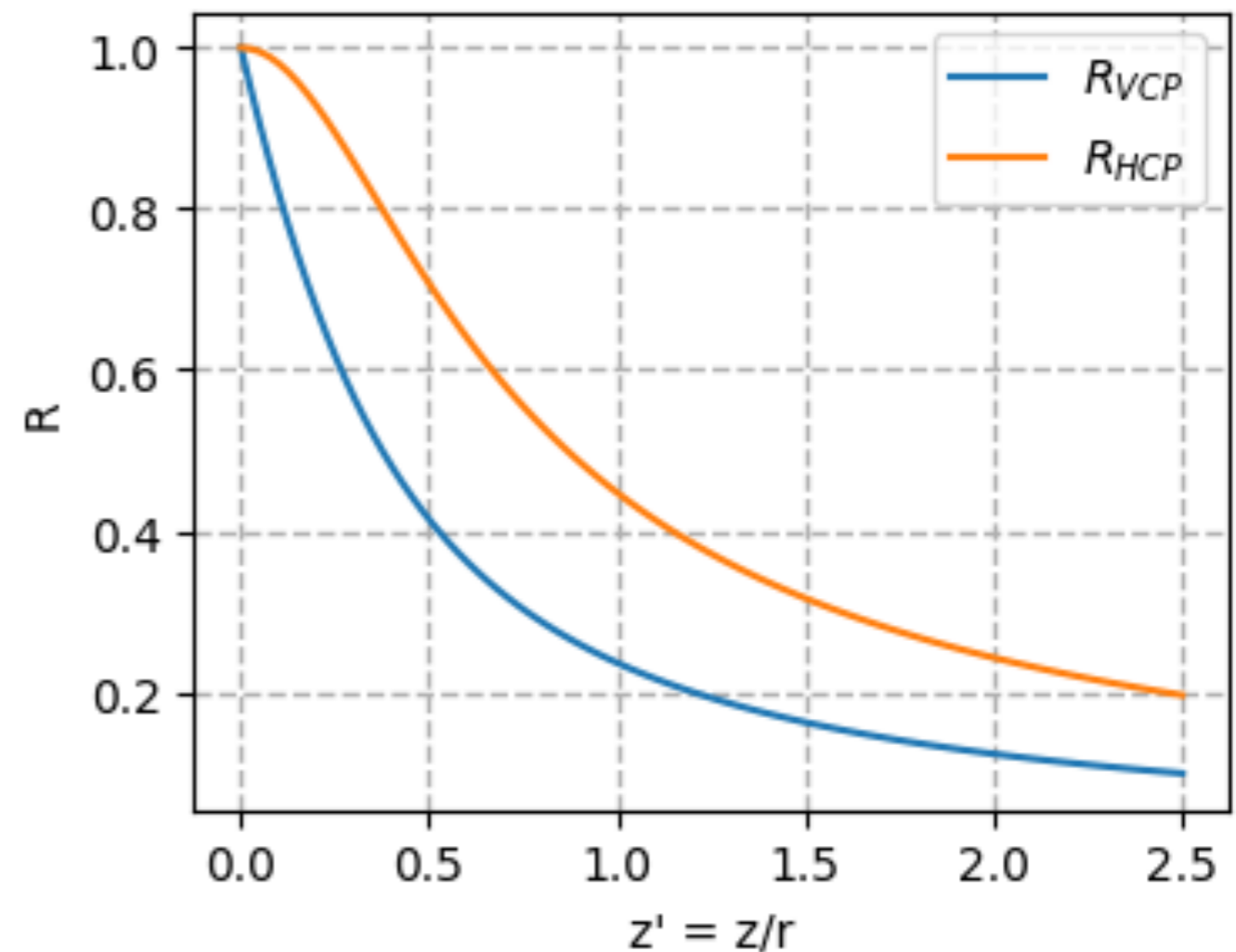
**Résistivité apparente:** Exemple avec 3 couches et dispositif HCP:

- hauteur du dispositif: 1 m
- distance entre les boucles: 4 m
- couche 1:  $d=1.5$  m,  $\sigma = 1$  mS/m
- couche 2:  $\sigma = 10$  mS/m

$$\begin{aligned}\sigma_a &= (1 - R(1/4))\sigma_{air} \\ &\quad + (R(1/4) - R(2.5/4))\sigma_1 \\ &\quad + (R(2.5/4))\sigma_2\end{aligned}$$

$$\sigma_a = 0.11 \cdot 0 + 0.27 \cdot 1 + 0.62 \cdot 10$$

$$\sigma_a = 6.47 \text{ mS/m}$$



# Conductivité (limite résistive)

**Profondeur d'investigation:** Dans la limite résistive, elle ne dépend que de l'espacement et de l'orientation des boucles

## Profondeur d'investigation EM-34

Séparation	Profondeur (m)	
	HCP	VCP
10	15	7.5
20	30	15
40	60	30



## Profondeur d'investigation EM-31

- HCP: ~6m
- VCP: ~3m

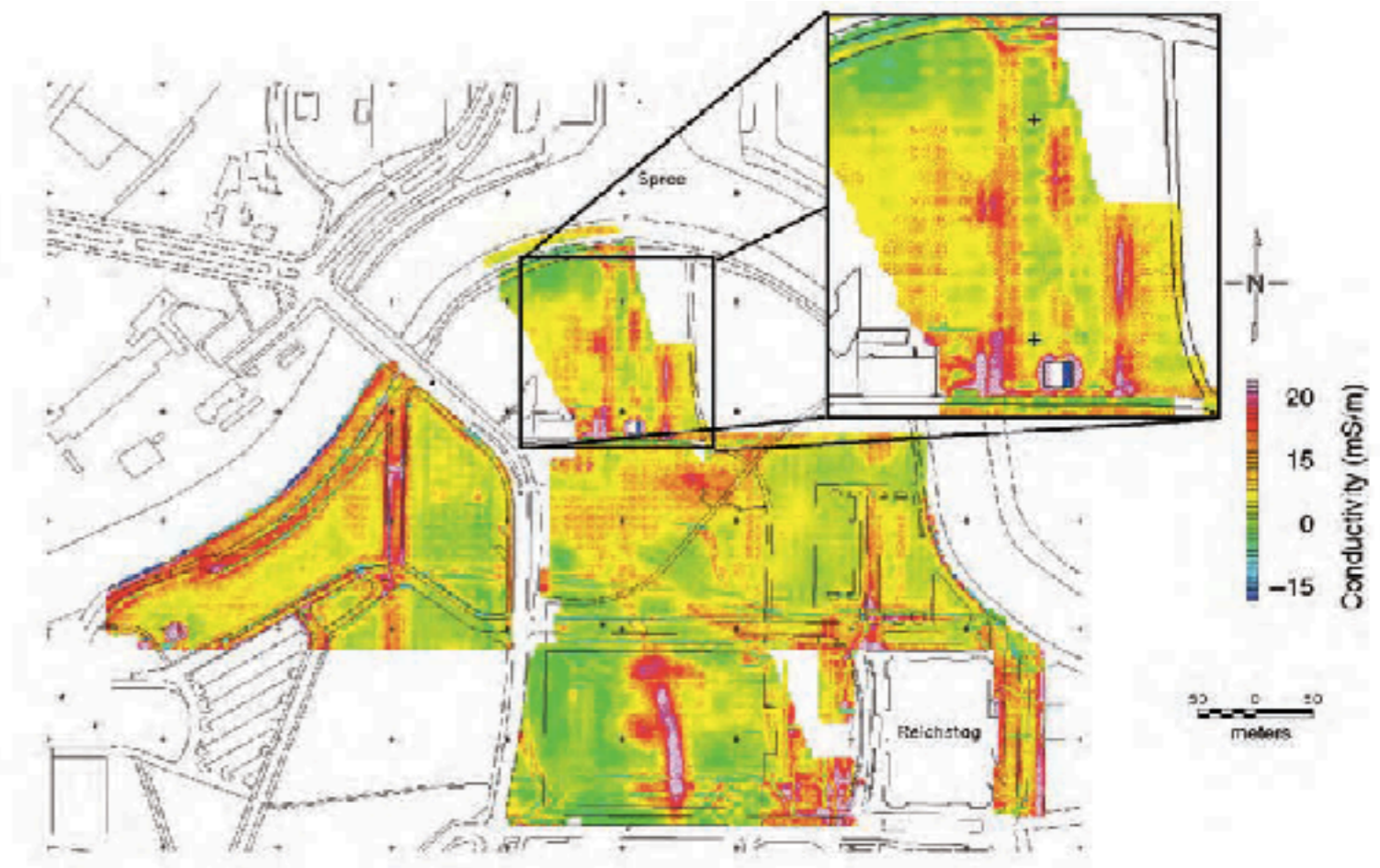


# Sondage en profondeur

Pour retrouver les variations de la résistivité en profondeur, il faut:

- Varier la fréquence (hors de la limite résistive)
- Varier l'espacement des boucles (pas toujours possible)
- Avoir plusieurs points de mesure par station
- Procéder à l'inversion

En pratique, c'est plutôt rare, on utilise surtout les conductivimètres pour faire des cartes des variations latérales de conductivité.



# Méthodes en temps: Principes de base

# Approximation quasi-statique

Différentes figures de cas sont possibles selon les fréquences utilisées

$$(\nabla^2 - i\sigma\mu\omega + \epsilon\mu\omega^2)\mathbf{E} = 0$$

Méthodes D  
 $\omega \rightarrow 0$

$$\nabla^2 V = 0$$



Régime permanent

Les méthodes électromagnétiques ne sont applicables que dans l'**approximation quasi-statique**:

$$\sigma \gg \omega\epsilon$$



Régime diffusif

Méthodes Radar  
 $\omega \ll \omega\epsilon$

$$(\nabla^2 - \epsilon\mu\omega^2)\mathbf{E} = 0$$



Régime propagation

# Propagation d'une impulsion

---

La solution de l'équation de diffusion:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$$

La solution pour une fréquence:

$$H_x = H_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)}$$

La solution pour une impulsion:

$$E_x = E_0 \frac{\sqrt{\mu\sigma z}}{2\pi^{1/2} t^{3/2}} e^{-\mu\sigma z^2/4t} \quad H_y = -E_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\pi\mu t}} e^{-\mu\sigma z^2/4t}$$


---

# Propagation d'une impulsion

La distance de diffusion :

$$z_{max} = \sqrt{\frac{2t}{\sigma\mu}} = \delta_{TD}$$

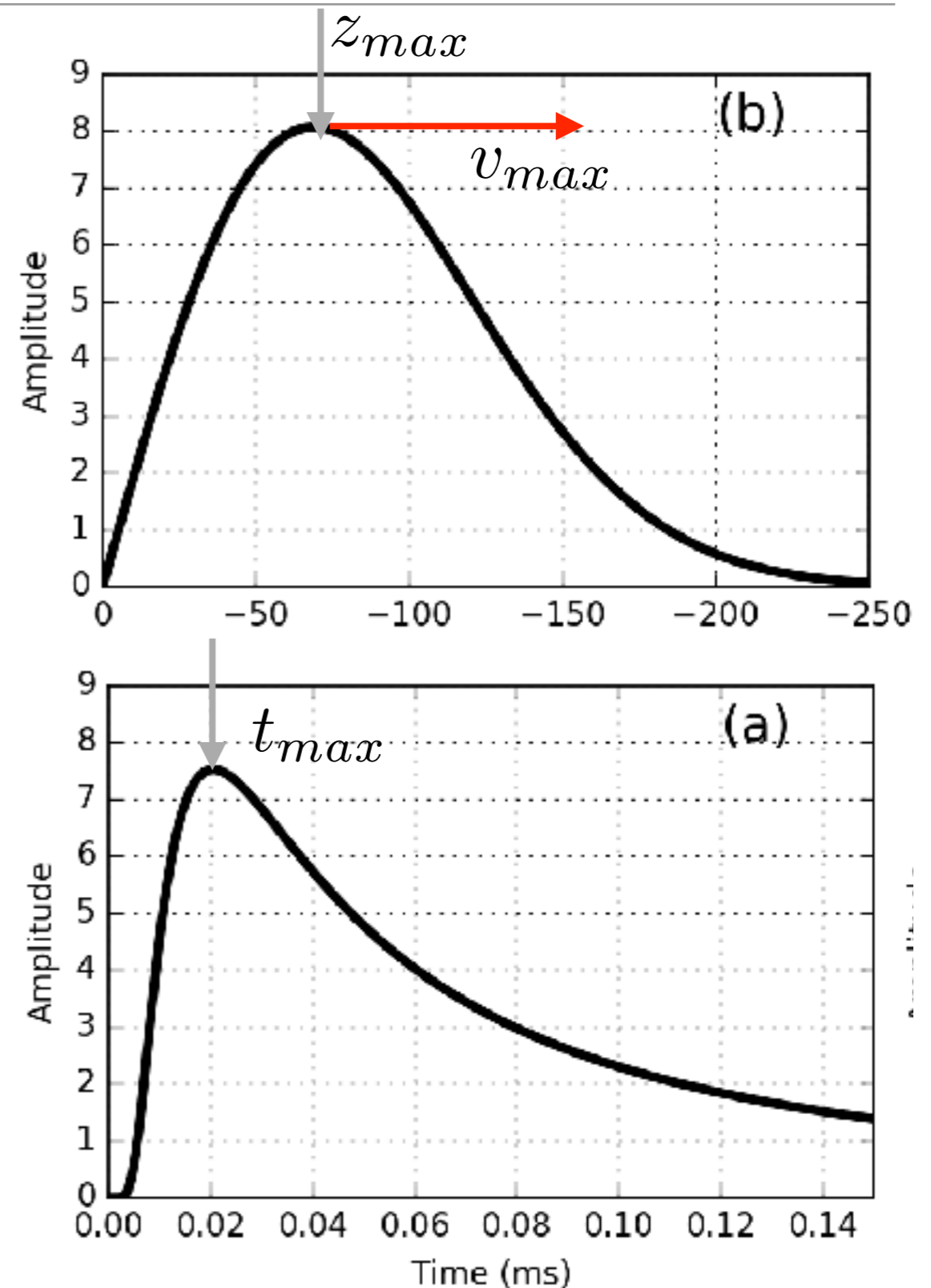
Analogie à la  
profondeur de peau  
en FEM

Le temps de diffusion:

$$t_{max} = \frac{\mu\sigma z^2}{6}$$

La vitesse de diffusion

$$v_{max} = \frac{1}{\sqrt{2\mu\sigma t}}$$





# Propagation d'une impulsion

La distance de diffusion :

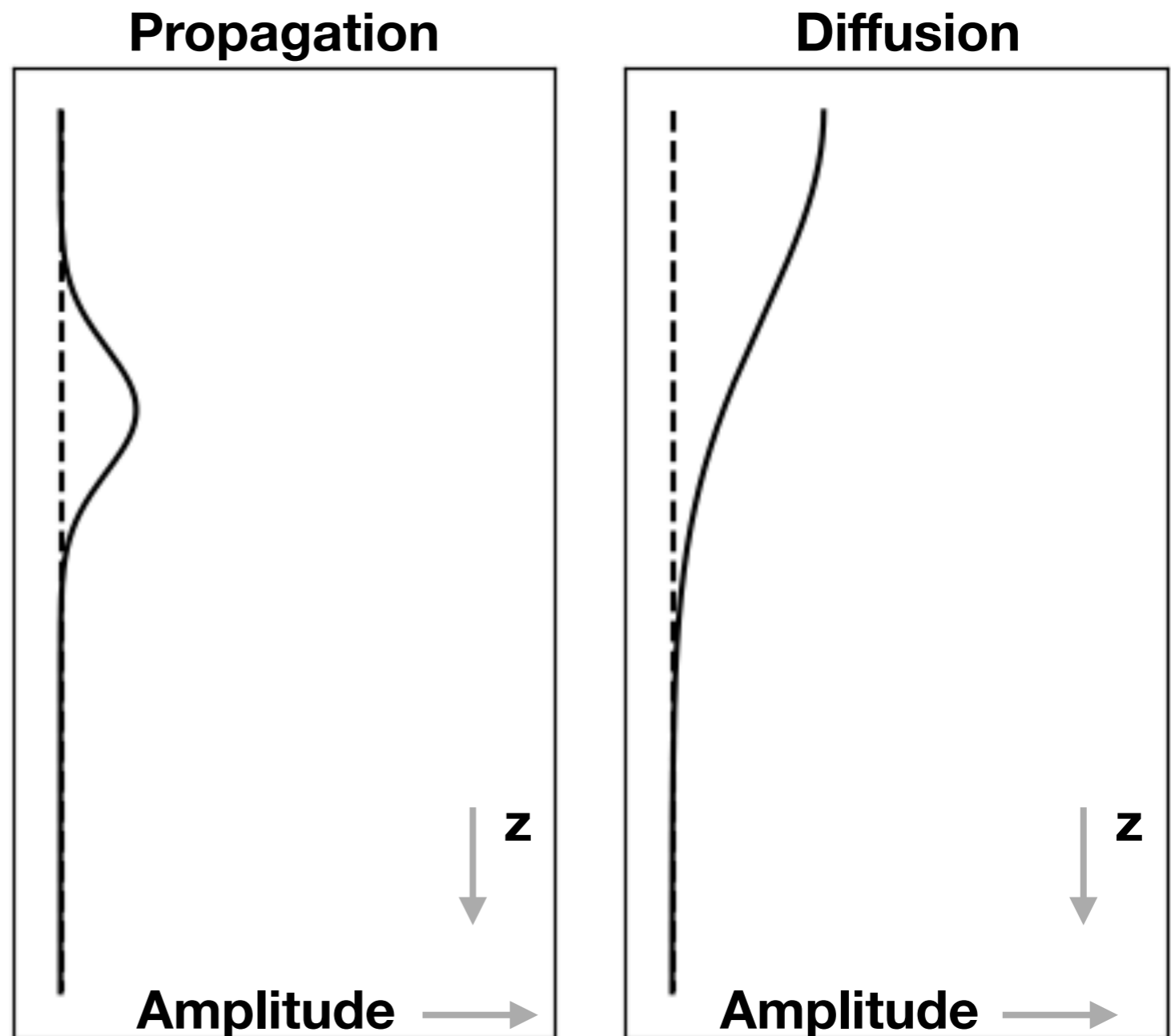
$$z_{max} = \sqrt{\frac{2t}{\sigma\mu}} = \delta_{TD}$$

Le temps de diffusion:

$$t_{max} = \frac{\mu\sigma z^2}{6}$$

La vitesse de diffusion

$$v_{max} = \frac{1}{\sqrt{2\mu\sigma t}}$$



# Propagation d'une impulsion

La distance de diffusion :

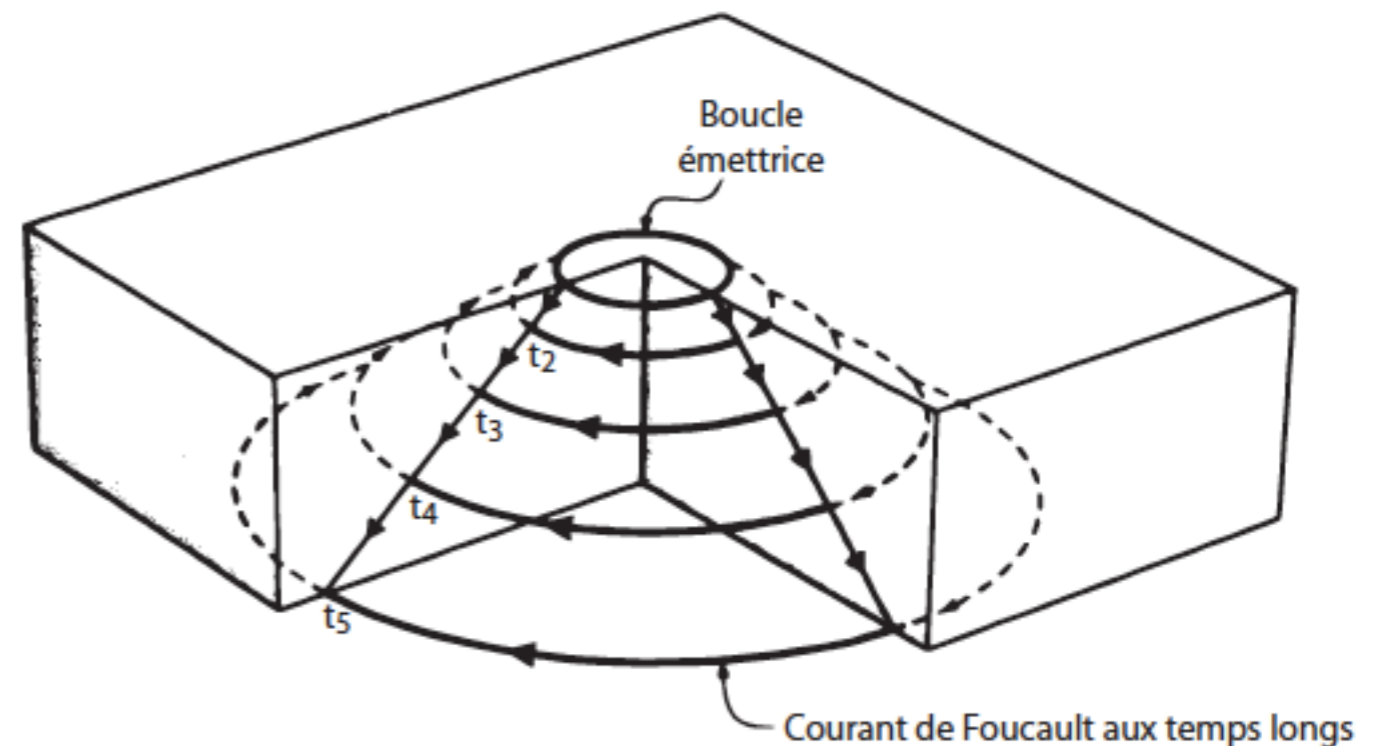
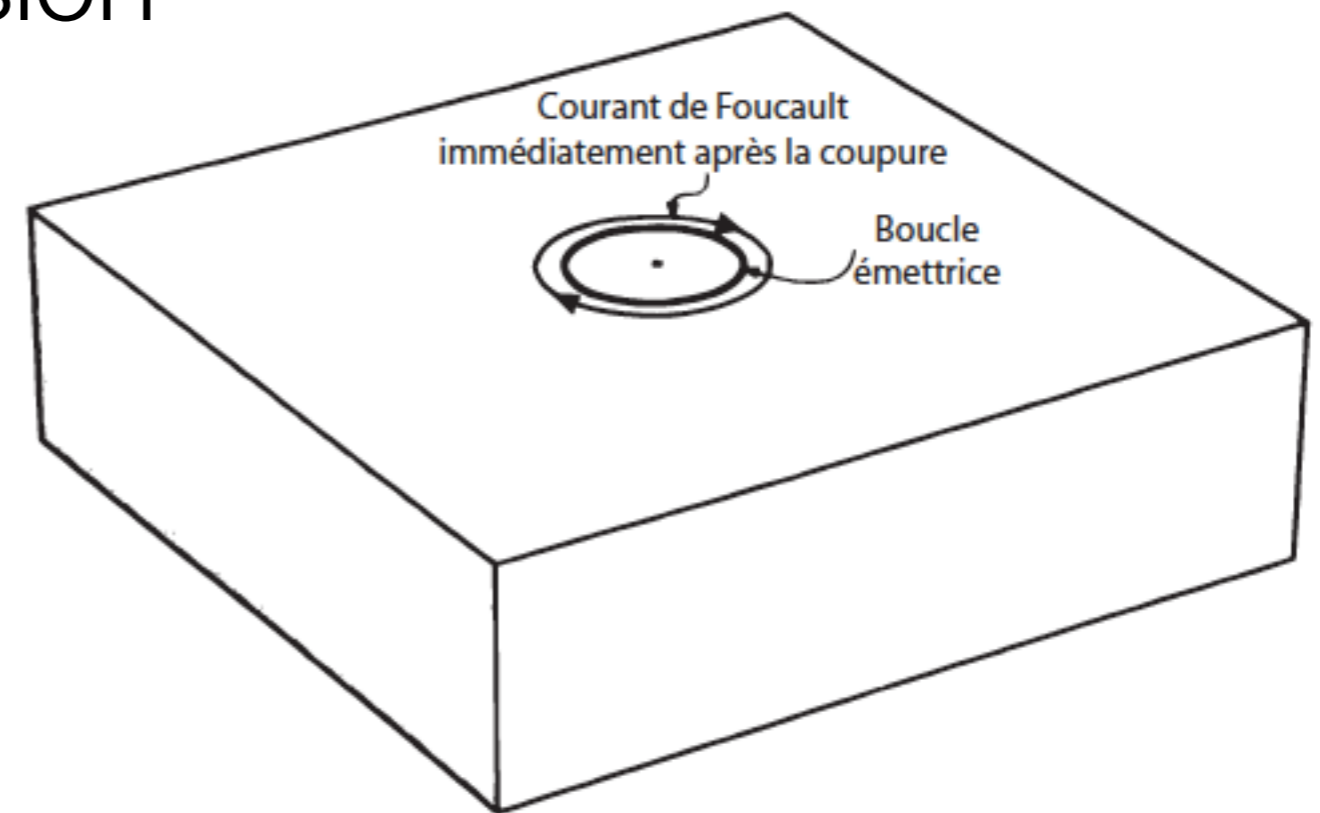
$$z_{max} = \sqrt{\frac{2t}{\sigma\mu}} = \delta_{TD}$$

Le temps de diffusion:

$$t_{max} = \frac{\mu\sigma z^2}{6}$$

La vitesse de diffusion

$$v_{max} = \frac{1}{\sqrt{2\mu\sigma t}}$$

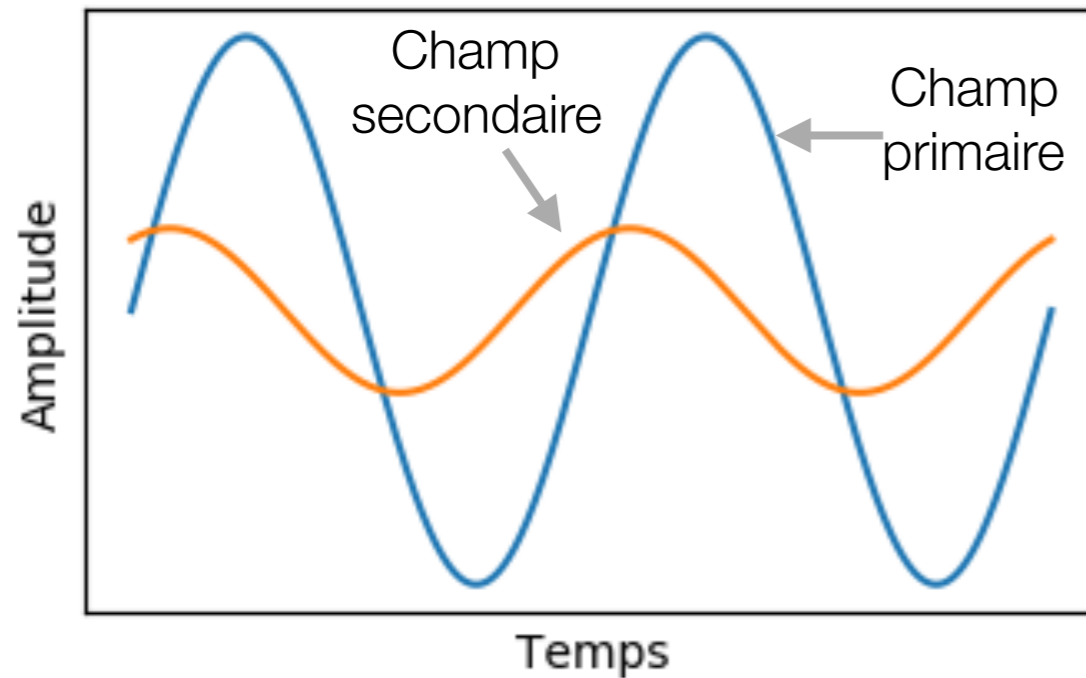


# Induction: Fréquentielle vs temporelle

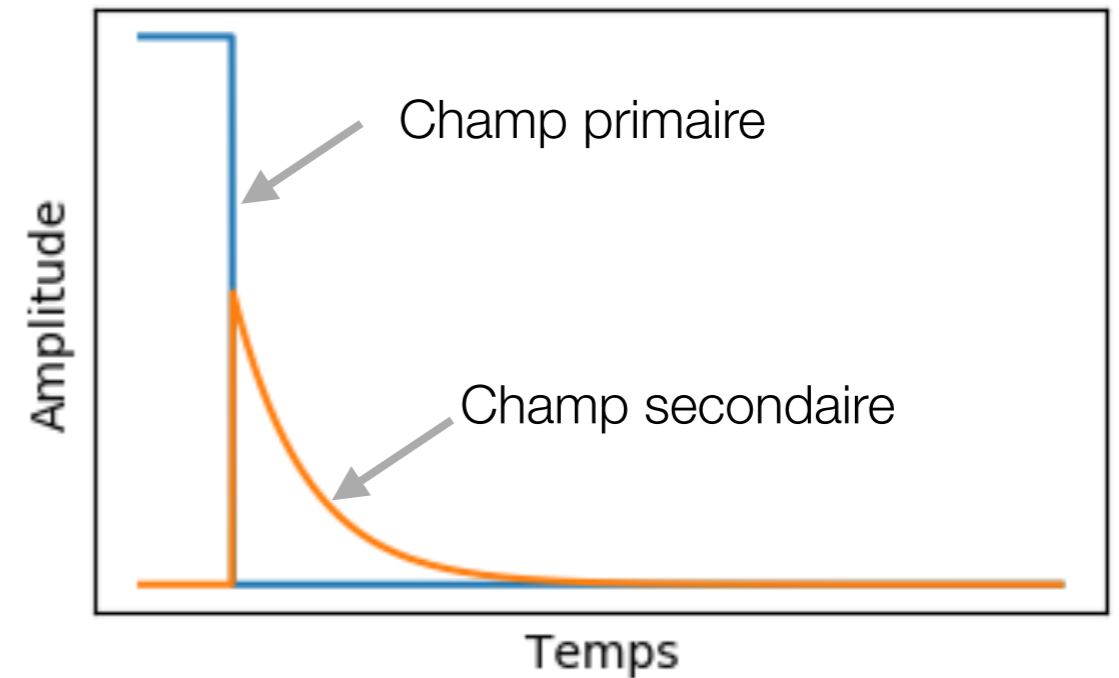
Selon la loi de Faraday, une f.e.m. est induite par un champ magnétique variant dans le temps:

$$\mathcal{E} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}$$

## FEM



## TDEM



# Quelle tension est mesurée au receveur ?

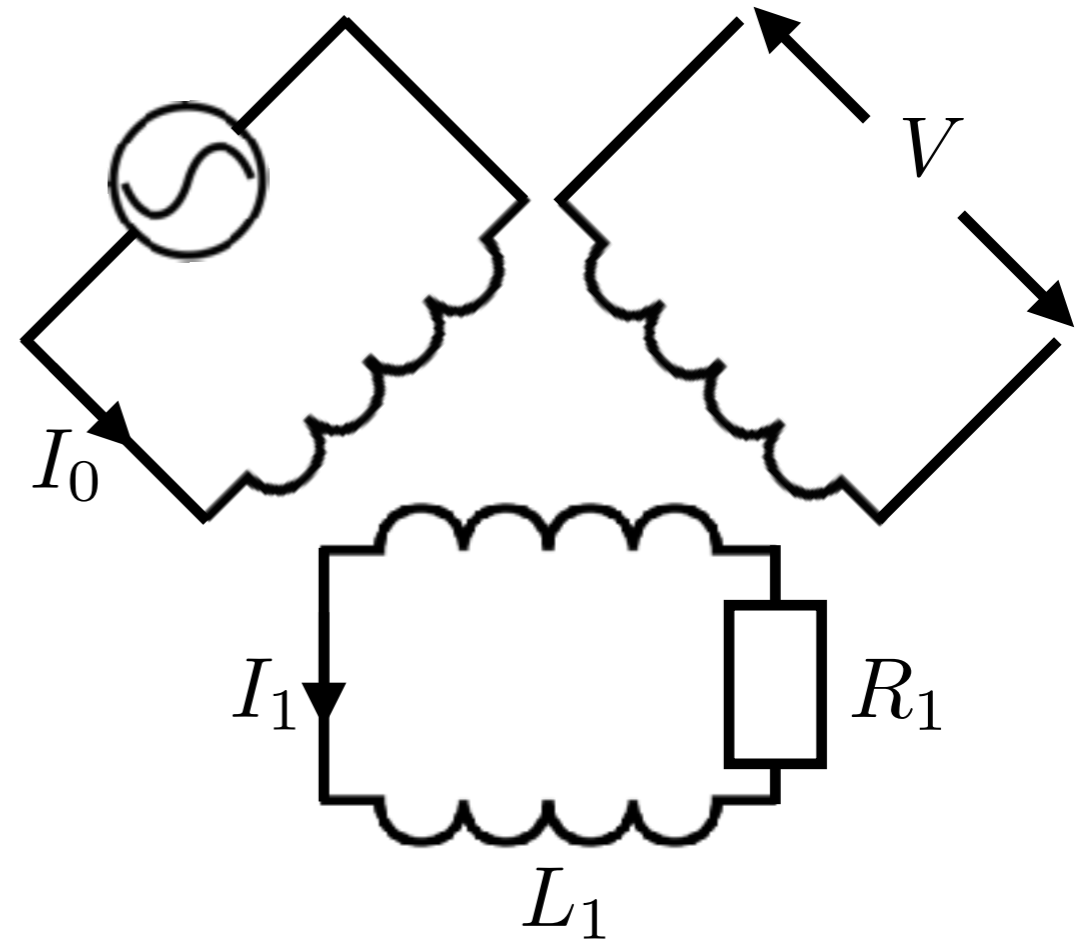
En fréquence, la réponse de ce système était donnée par:

$$\frac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_p} = - \frac{M_{01} M_{12}}{M_{02} L} \frac{i\alpha}{1 + i\alpha}$$

Avec, le nombre d'induction:

$$\alpha = \frac{\omega R}{L}$$

Nous voulons expliciter la dépendance en fréquence.



# Quelle tension est mesurée au receveur ?

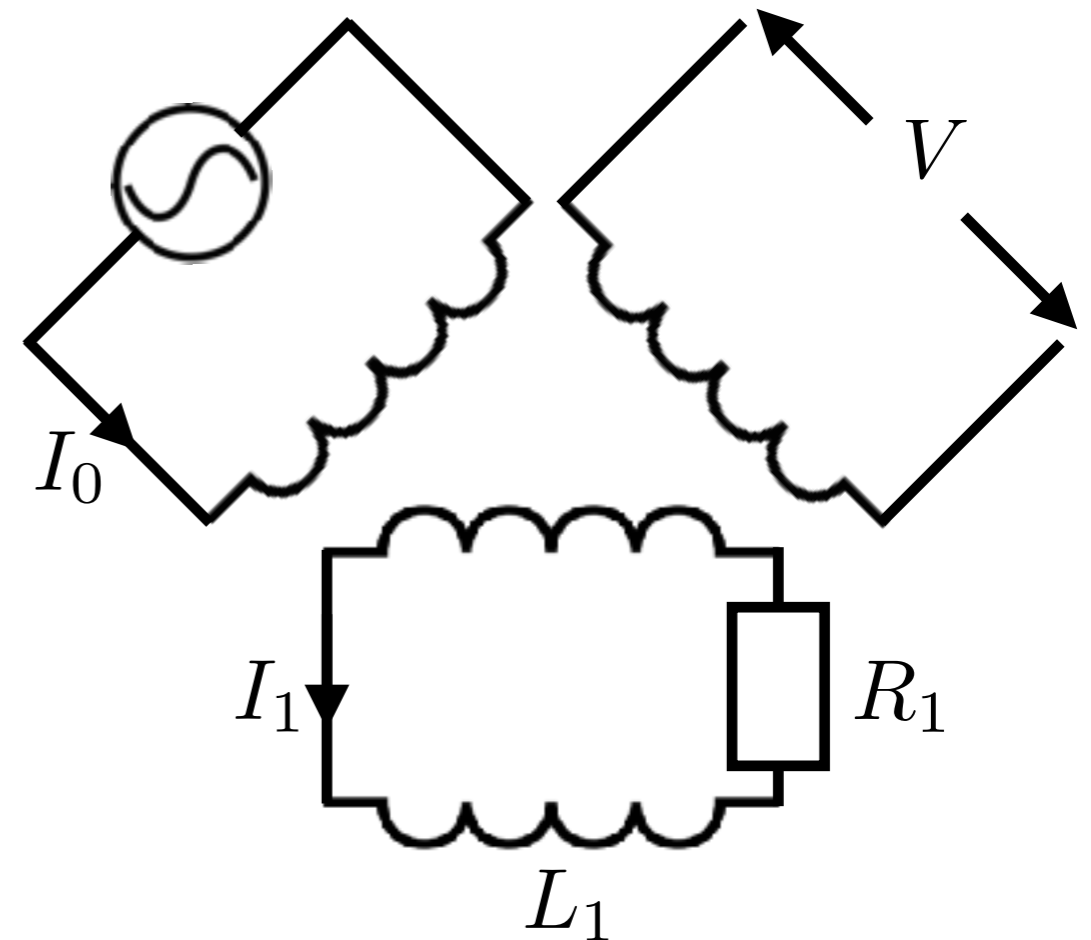
En fréquence, la réponse de ce système était donnée par:

$$\frac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_p} = - \frac{M_{01}M_{12}}{M_{02}L} \frac{i\alpha}{1 + i\alpha}$$

Définissons la constante de temps:

$$\tau = L_1/R_1$$

$$\mathcal{E}_s = - \frac{M_{01}M_{12}}{M_{02}L} \frac{i\omega\tau}{1 + i\omega\tau} \mathcal{E}_p(\omega)$$



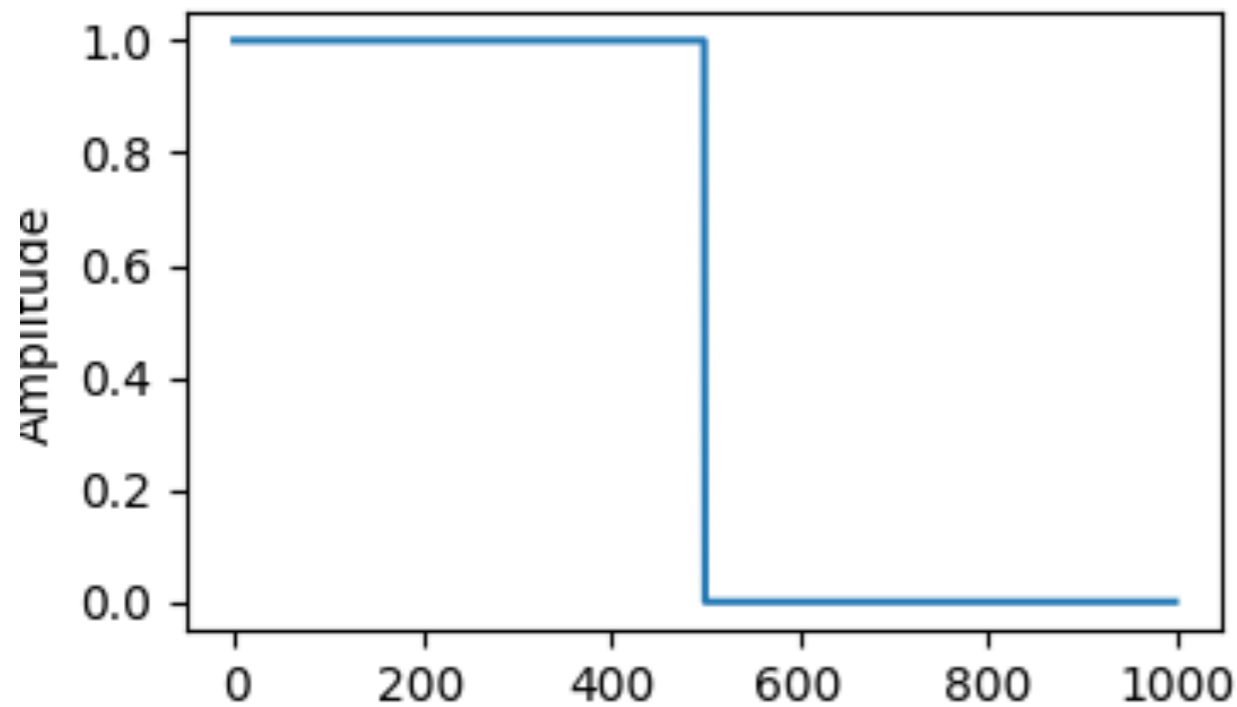
**Quelle est la forme de la f.e.m. primaire ?**

# Quelle tension est mesurée au receveur ?

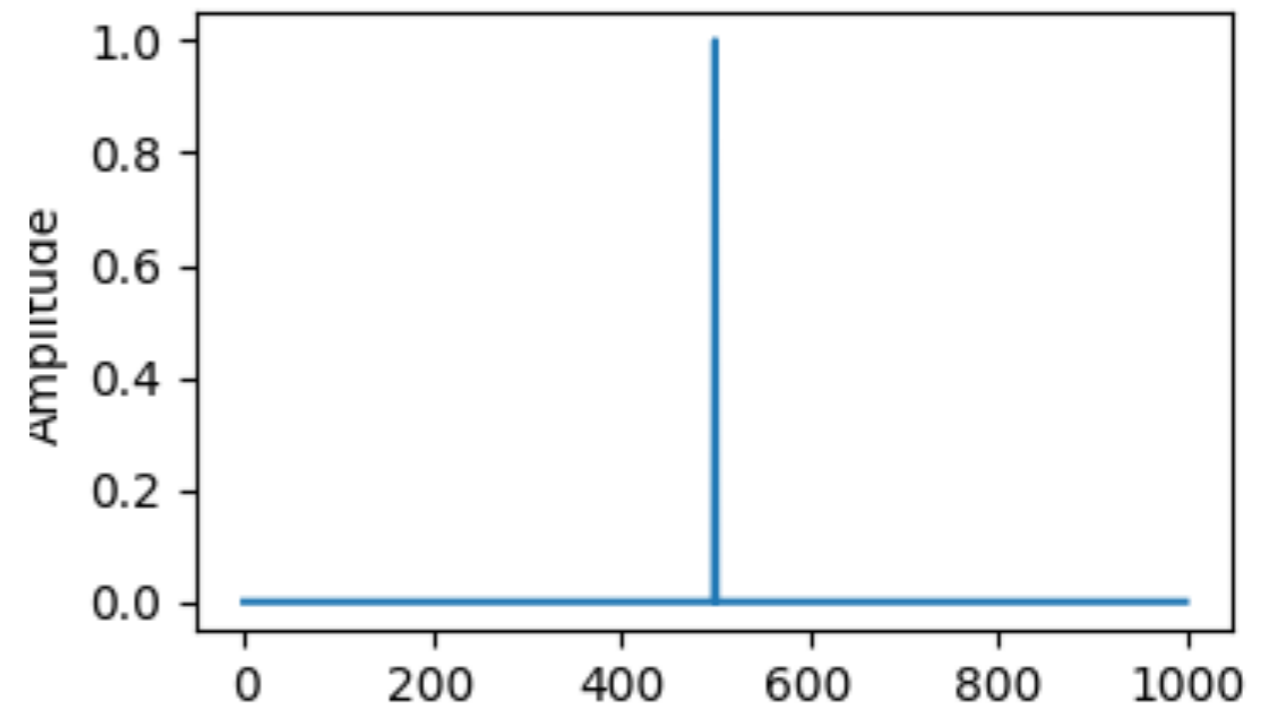
Si le courant au transmetteur est une onde carrée:

$$\mathcal{E}_p = -M_{02} \frac{\partial I}{\partial t} = M_{02} I_0 \delta(t) \leftarrow \text{Pic de Dirac}$$

**Courant au transmetteur**



**F.E.M au receveur**



# Quelle tension est mesurée au receveur ?

---

La réponse complète en fréquence:

$$\mathcal{E}_s = -\frac{M_{01}M_{12}}{M_{02}L} \frac{i\omega\tau}{1+i\omega\tau} \mathcal{E}_p(\omega)$$

$$\mathcal{E}_p = M_{02}I_0\delta(t)$$

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathcal{E}_s = -\frac{M_{01}M_{12}}{M_{02}L} \frac{i\omega\tau}{1+i\omega\tau} I_0M_{02}$$

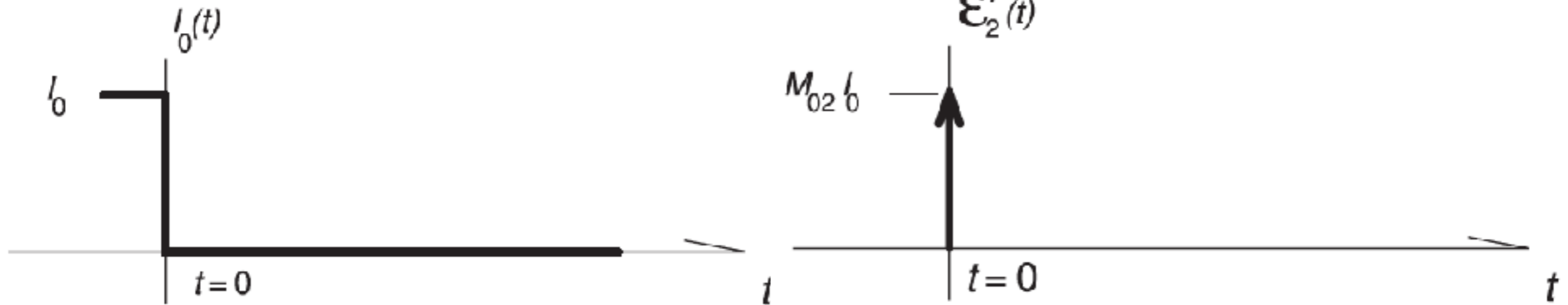
La réponse en temps est donnée par la transformée de Fourier inverse:

$$\mathcal{E}_s = \frac{M_{01}M_{12}}{L} I_0 \left[ \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} u(t) - \delta t \right]$$

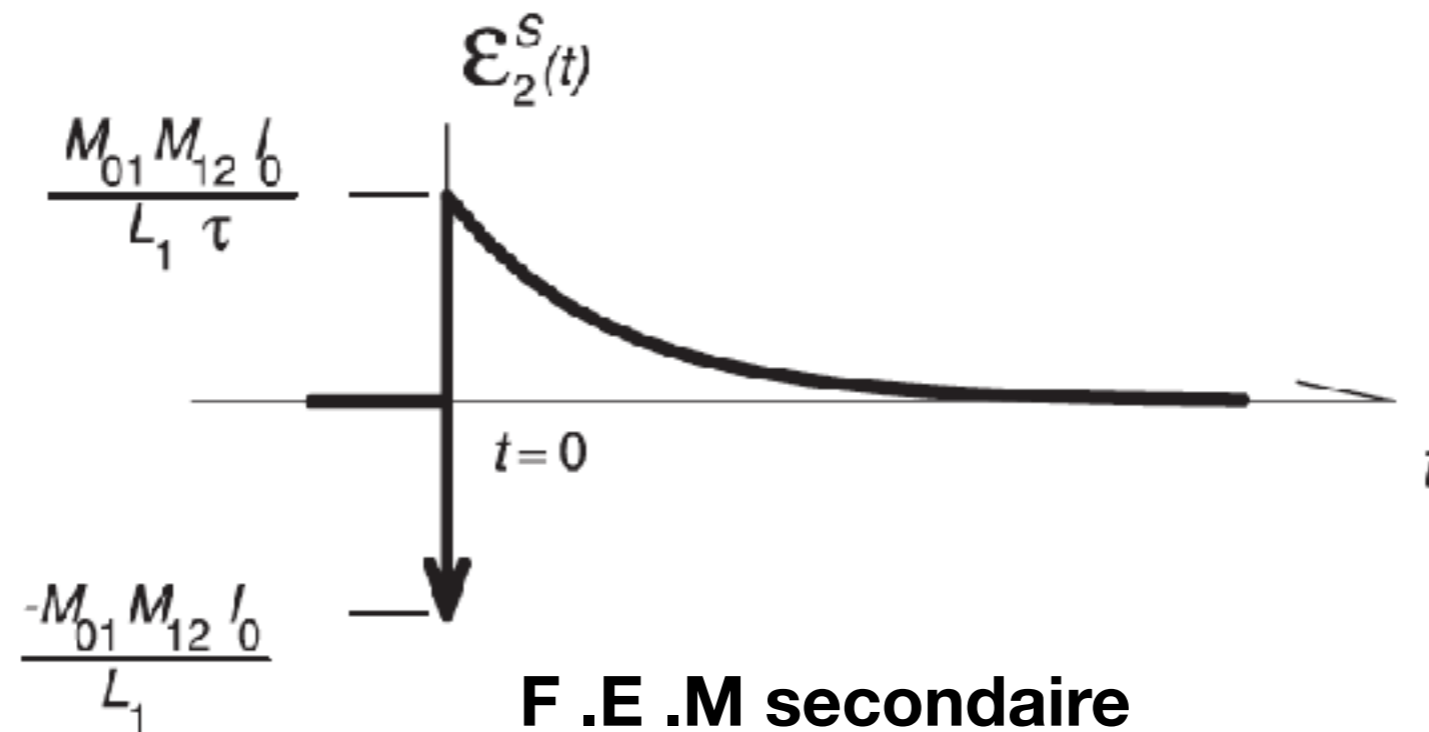
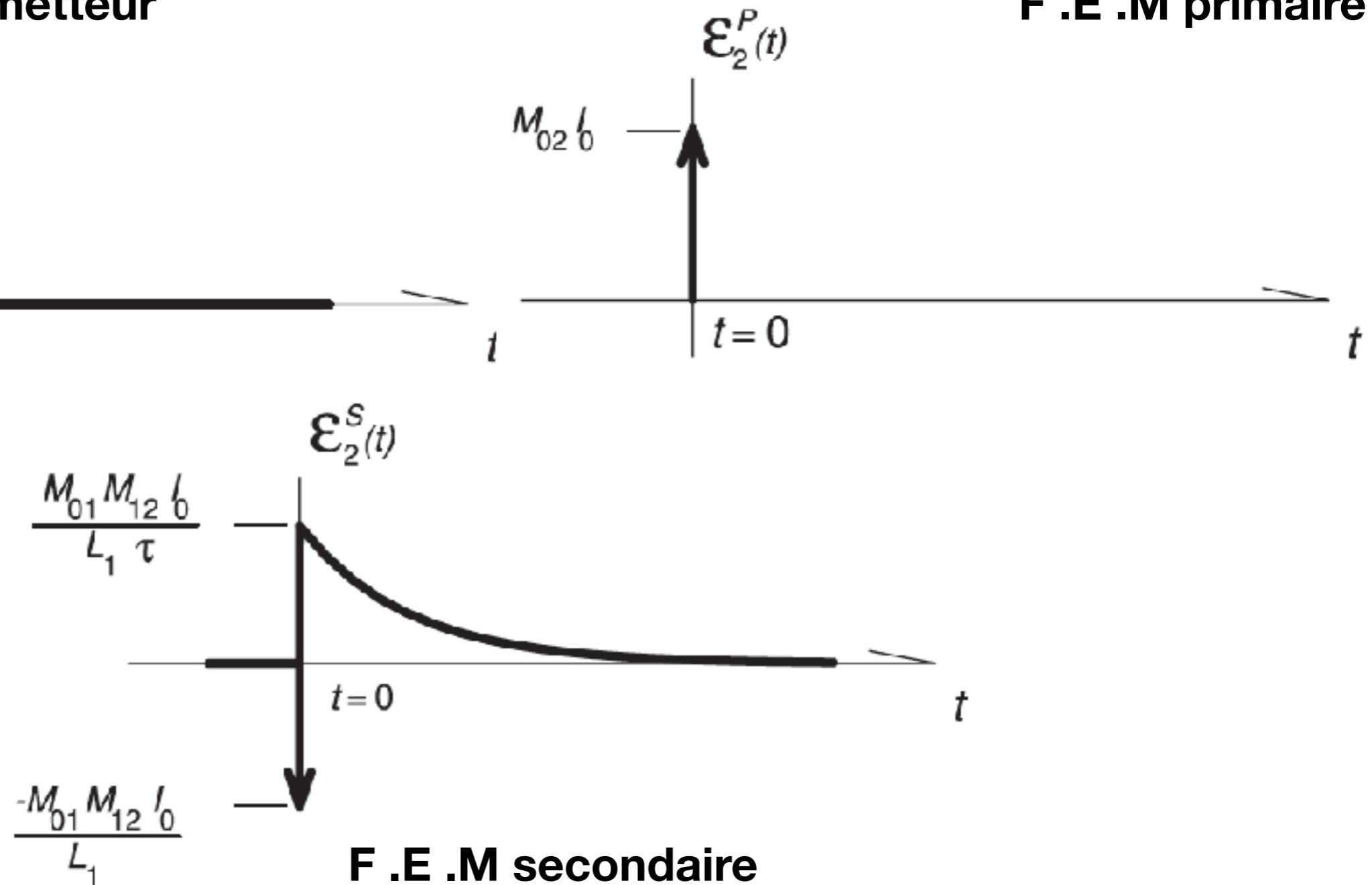
Fonction de Heaviside

# Induction: Fréquentielle vs temporelle

**Courant au transmetteur**



**F .E .M primaire**



**F .E .M secondaire**

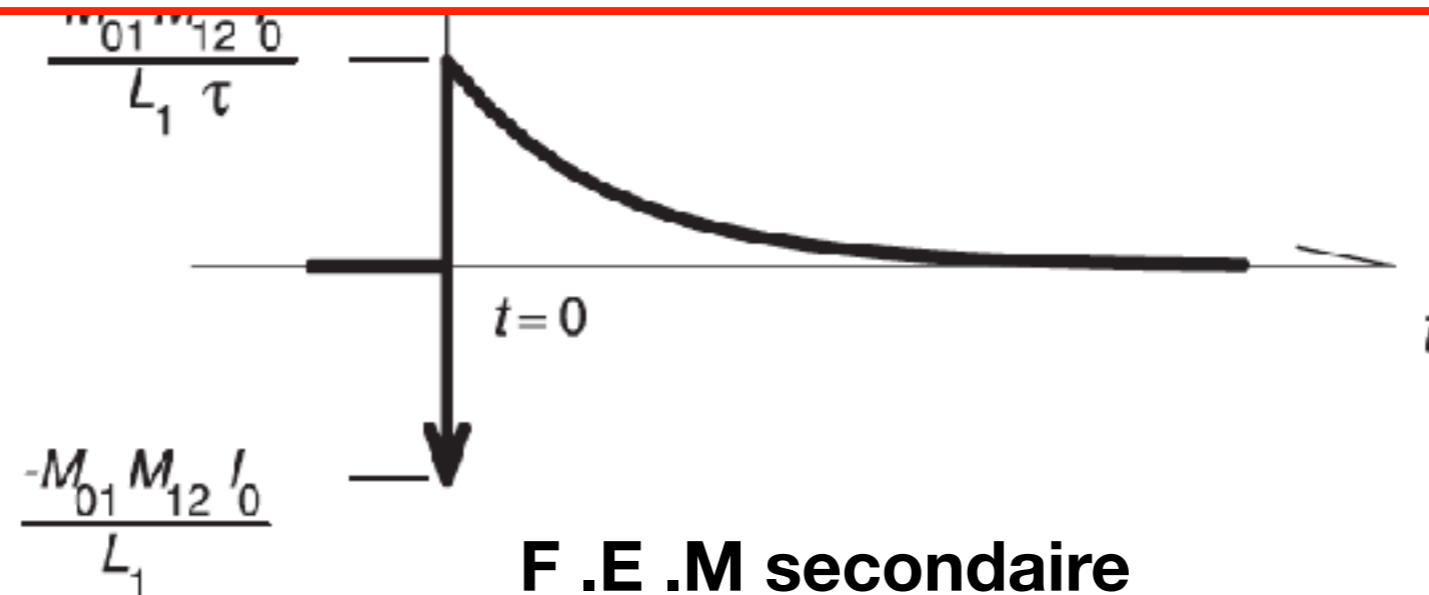


# Induction: Fréquentielle vs temporelle

Courant au

primaire

- Une coupure brusque du courant au transmetteur entraîne une décroissance dans le temps du champ secondaire
- La décroissance dépend des propriétés de la sous-surface
- Pour un sol tabulaire, la décroissance est différente



Réponse d'un milieu tabulaire

# Réponse d'un sol homogène

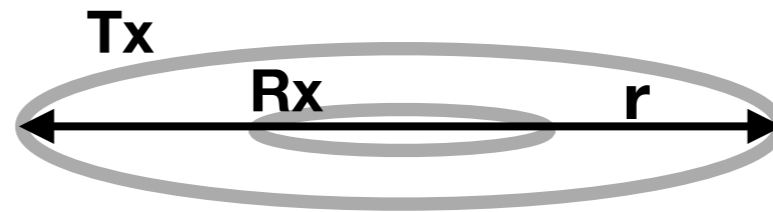
---

Deux configurations sont majoritairement utilisées en TDEM

## Boucles centrées

$$V_{CI} = -\mu_0 S_R \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$= \frac{3S_R I_T}{r^3 \sigma} \left[ \operatorname{erf}(u/\sqrt{2}) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} u (1 + u^2/3) e^{-u^2/2} \right]$$



## Boucles horizontales co-planaires

$$V_{HCP} = -\mu_0 S_R \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$= -\frac{9S_R S_T I_T}{2\pi r^5 \sigma} \left[ \operatorname{erf}(u/\sqrt{2}) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} u (1 + u^2/3 + u^4/9) e^{-u^2/2} \right]$$



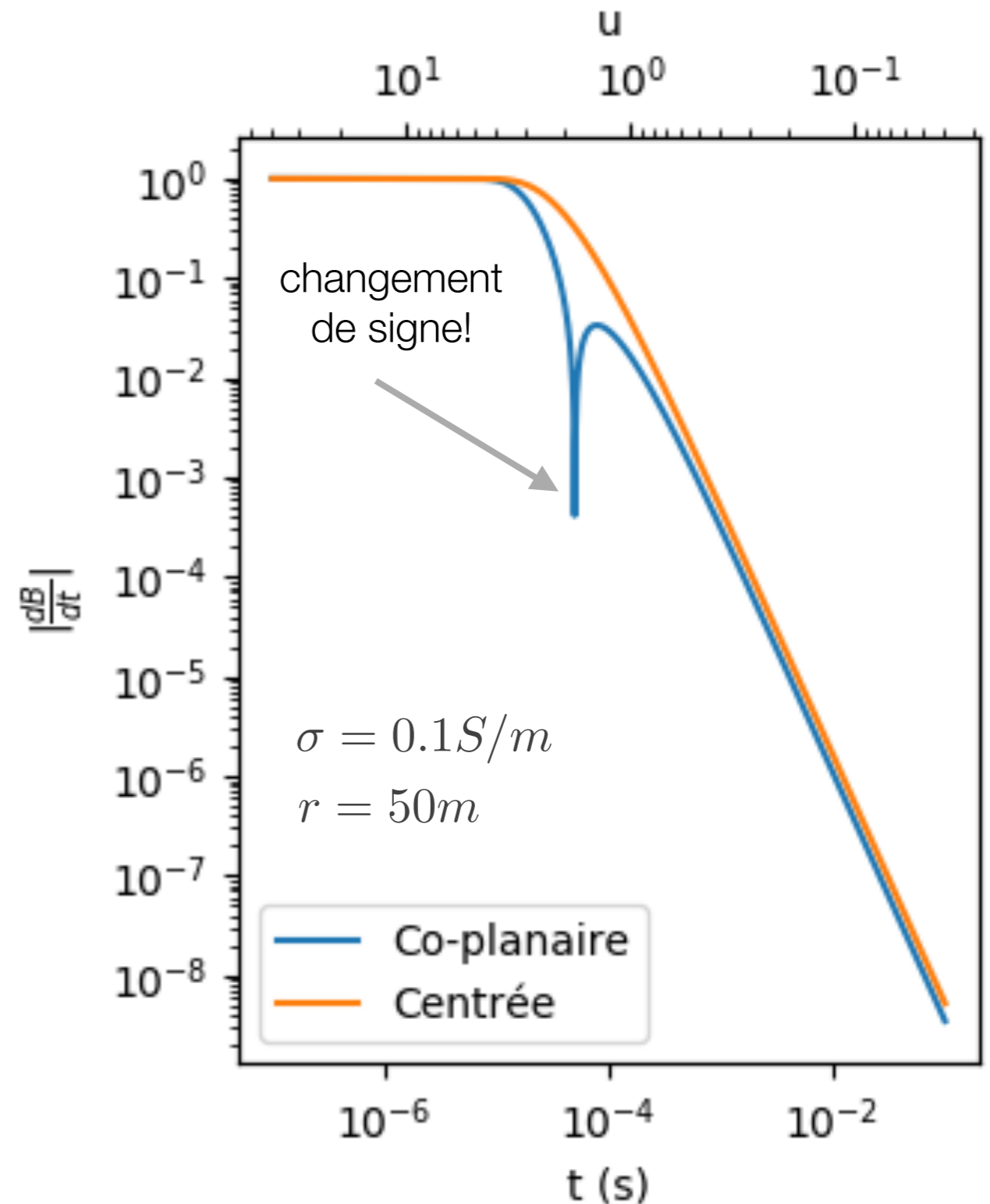
# Réponse d'un sol homogène

Les formules précédentes utilisent un nombre adimensionnel donné par:

$$u = r / \delta_{TD} = r \sqrt{\frac{\sigma \mu_0}{2t}}$$

Ce paramètre est analogue au nombre d'induction en FEM:

$$\alpha = \frac{r}{\delta} = r \sqrt{\frac{\sigma \mu_0 \omega}{2}}$$

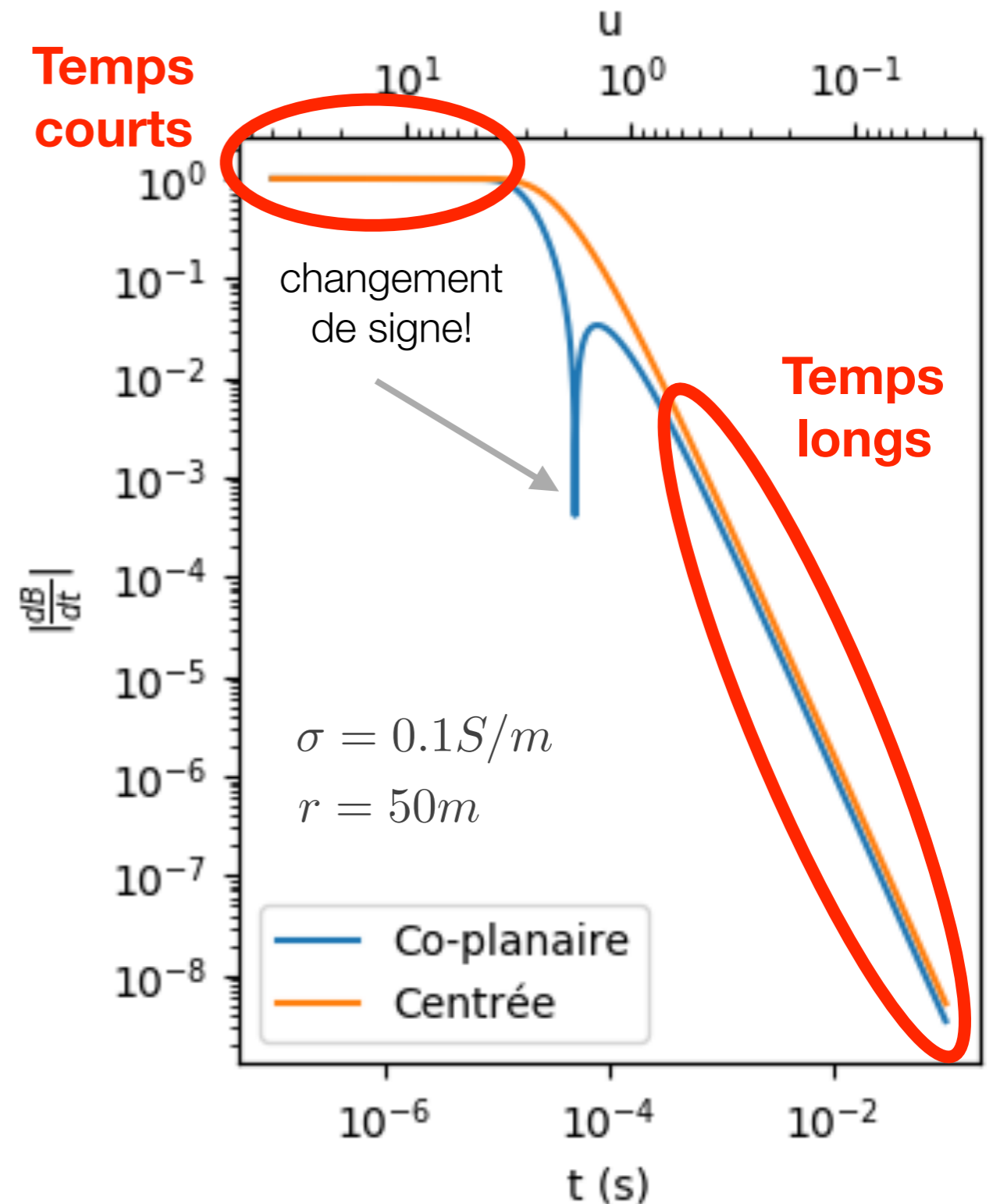


# Réponse d'un sol homogène

Tout comme en FEM où nous regardions les limites résistives et inductives, nous nous intéresserons à deux limites:

$$u = r / \delta_{TD} = r \sqrt{\frac{\sigma \mu_0}{2t}}$$

- Temps courts ( $u \gg 1$ )
- Temps longs ( $u \ll 1$ )



# Temps courts

Aux temps courts:

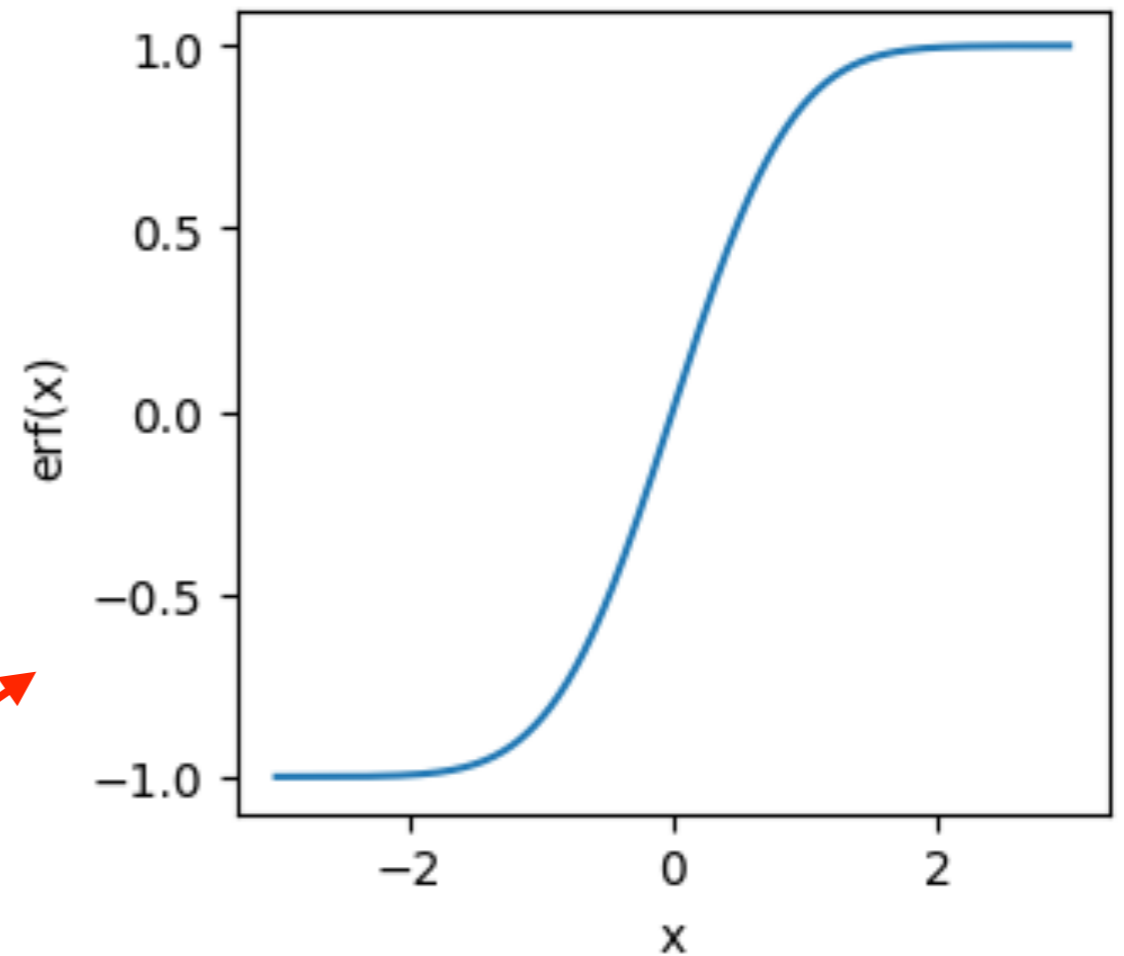
$$u = r / \delta_{TD} = r \sqrt{\frac{\sigma \mu_0}{2t}}$$

$$u \rightarrow \infty$$

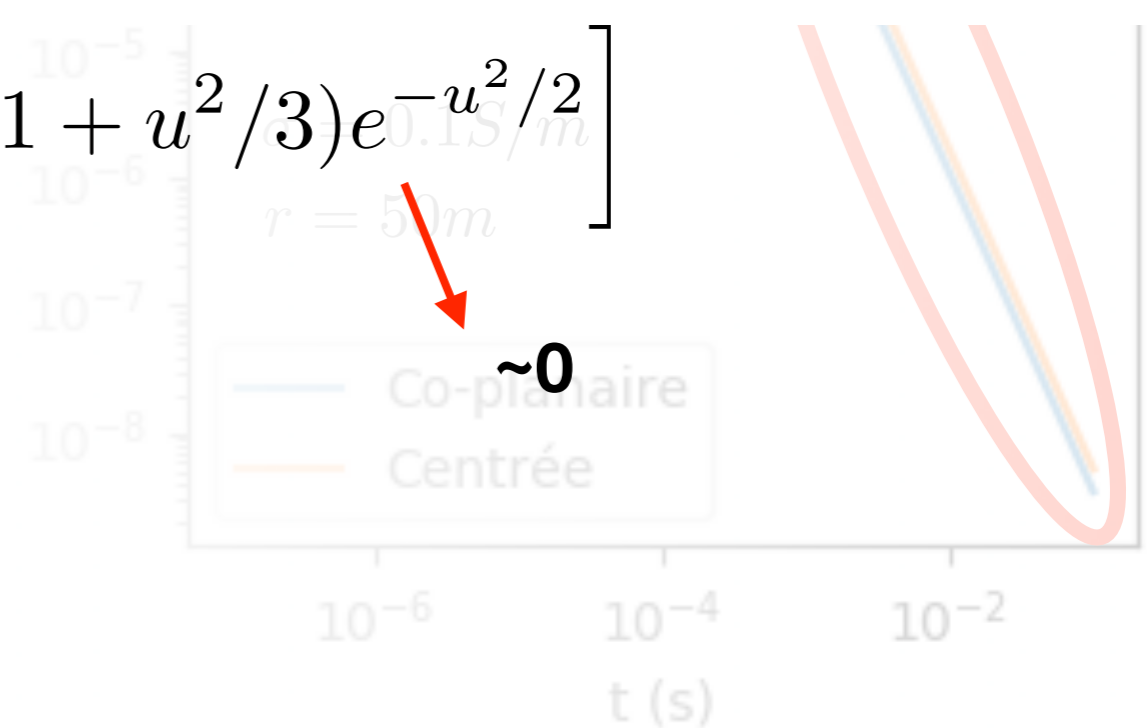
Pour la **boucle centrale**:

$$V_{CI} = \frac{3S_R I_T}{r^3 \sigma} \left[ \text{erf}(u/\sqrt{2}) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} u (1 + u^2/3) e^{-u^2/2} \right]$$

$$V_{CI} \approx \frac{3S_R I_T}{r^3 \sigma}$$



$\sim 1$



# Temps courts

Aux temps courts:

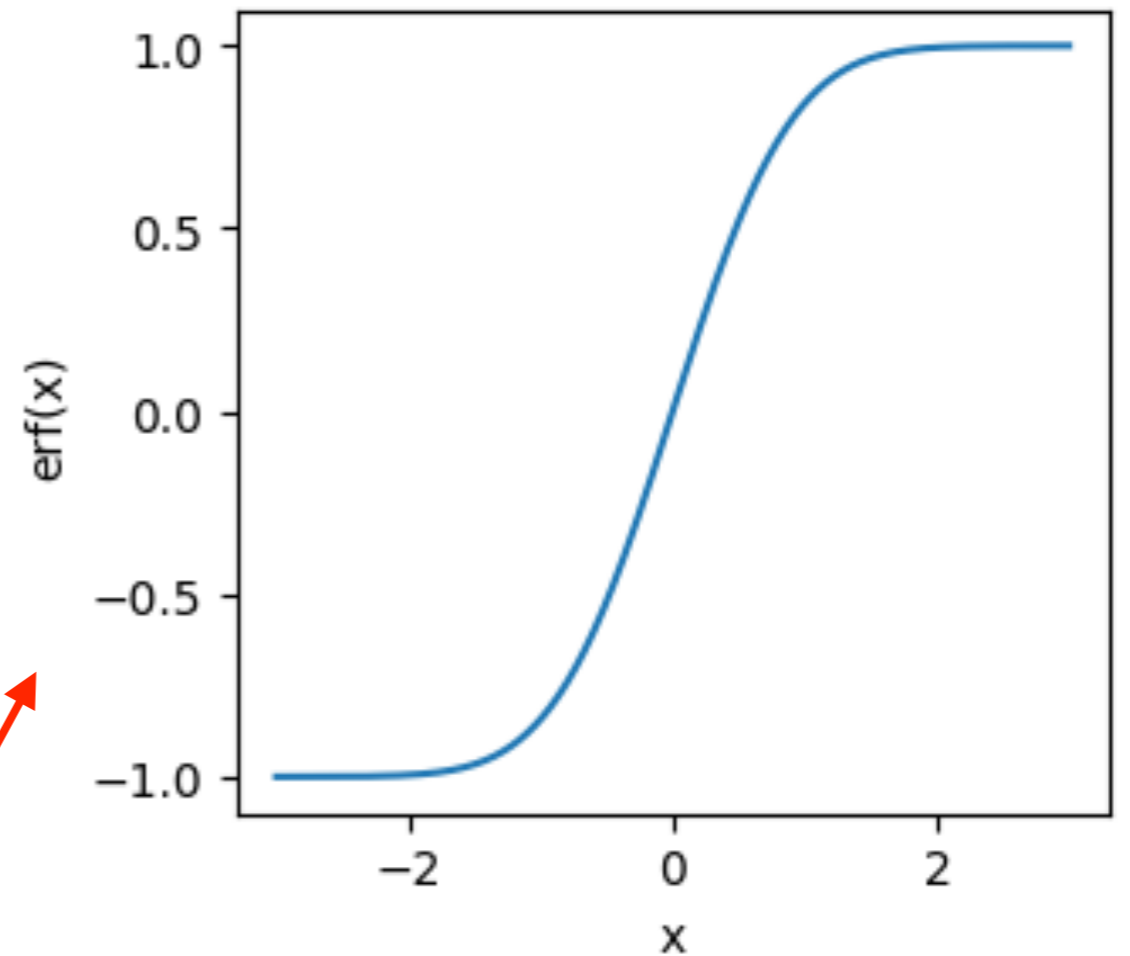
$$u = r / \delta_{TD} = r \sqrt{\frac{\sigma \mu_0}{2t}}$$

$$u \rightarrow \infty$$

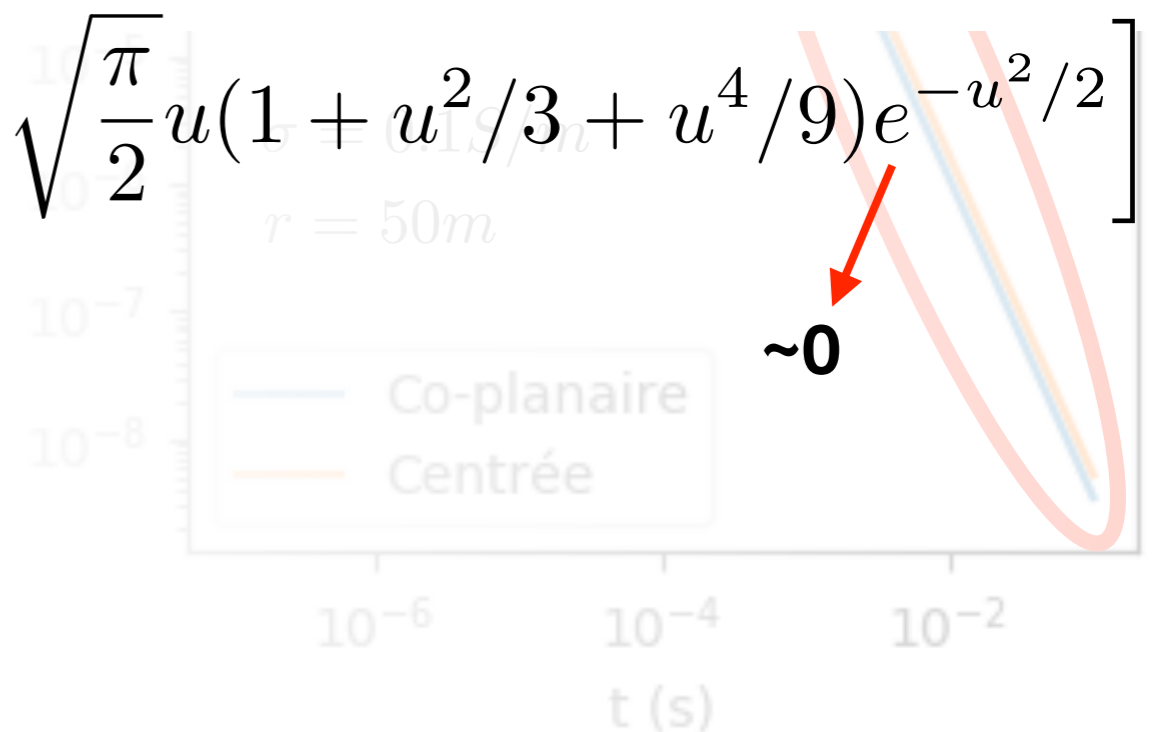
Pour **horizontale coplanaire**:

$$V_{HCP} = -\frac{9S_R S_T I_T}{2\pi r^5 \sigma} \left[ \text{erf}(u/\sqrt{2}) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} u \left( 1 + \frac{u^2}{3} + \frac{u^4}{9} \right) e^{-u^2/2} \right]$$

$$V_{HCP} \approx \frac{-9S_R S_T I_T}{2\pi r^5 \sigma}$$



$\sim 1$



$\sim 0$

# Temps courts

Aux temps courts:

$$u = r / \delta_{TD} = r \sqrt{\frac{\sigma \mu_0}{2t}}$$

$$u \rightarrow \infty$$

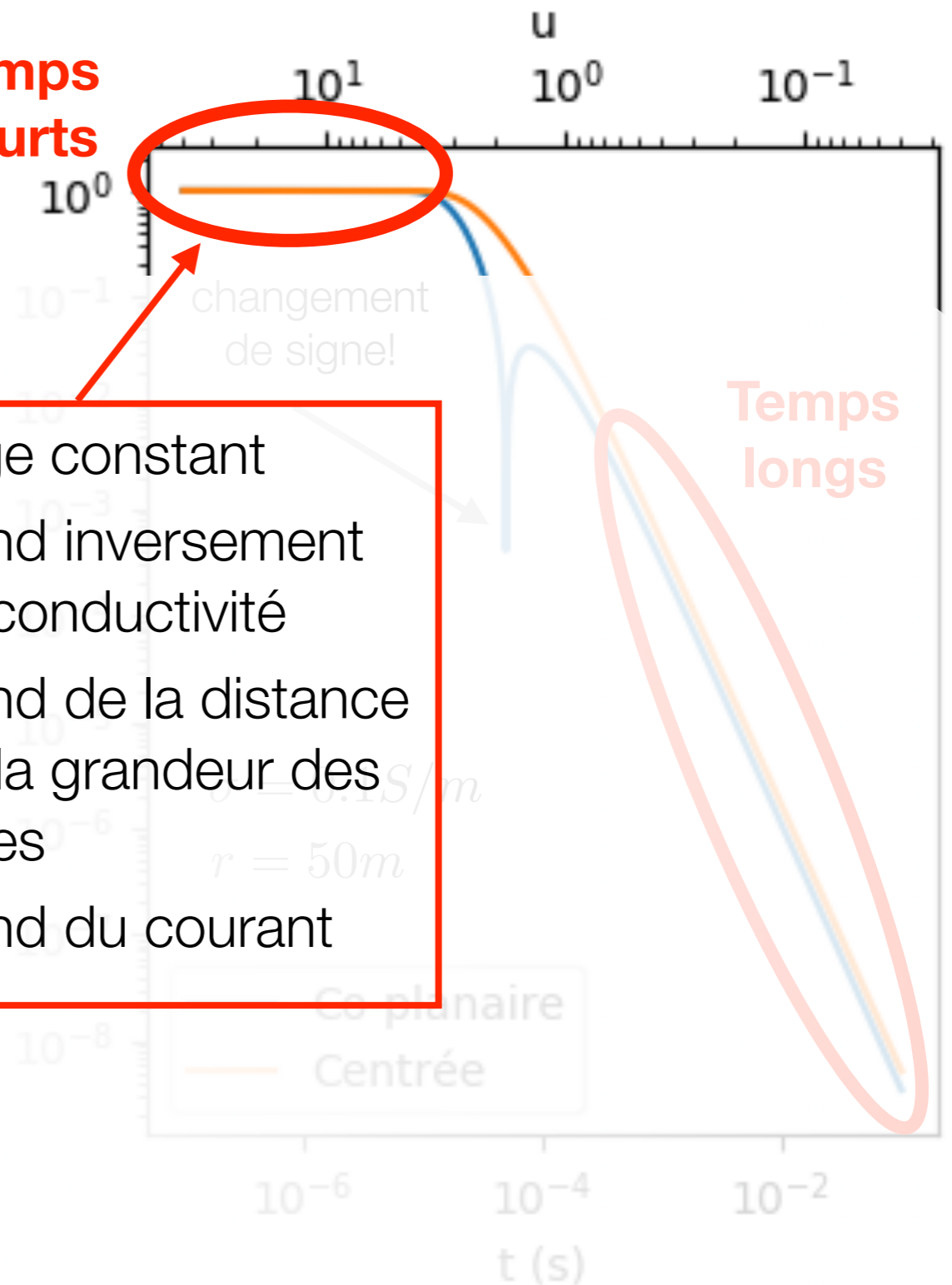
Pour les **deux configurations**:

$$V_{CI} \approx \frac{3S_R I_T}{r^3 \sigma}$$

$$V_{HCP} \approx \frac{-9S_R S_T I_T}{2\pi r^5 \sigma}$$

- Voltage constant
- Dépend inversement de la conductivité
- Dépend de la distance et de la grandeur des boucles
- Dépend du courant

**Temps courts**





# Temps longs

Aux temps longs:

$$u = r/\delta_{TD} = r\sqrt{\frac{\sigma\mu_0}{2t}}$$

$$u \rightarrow 0$$

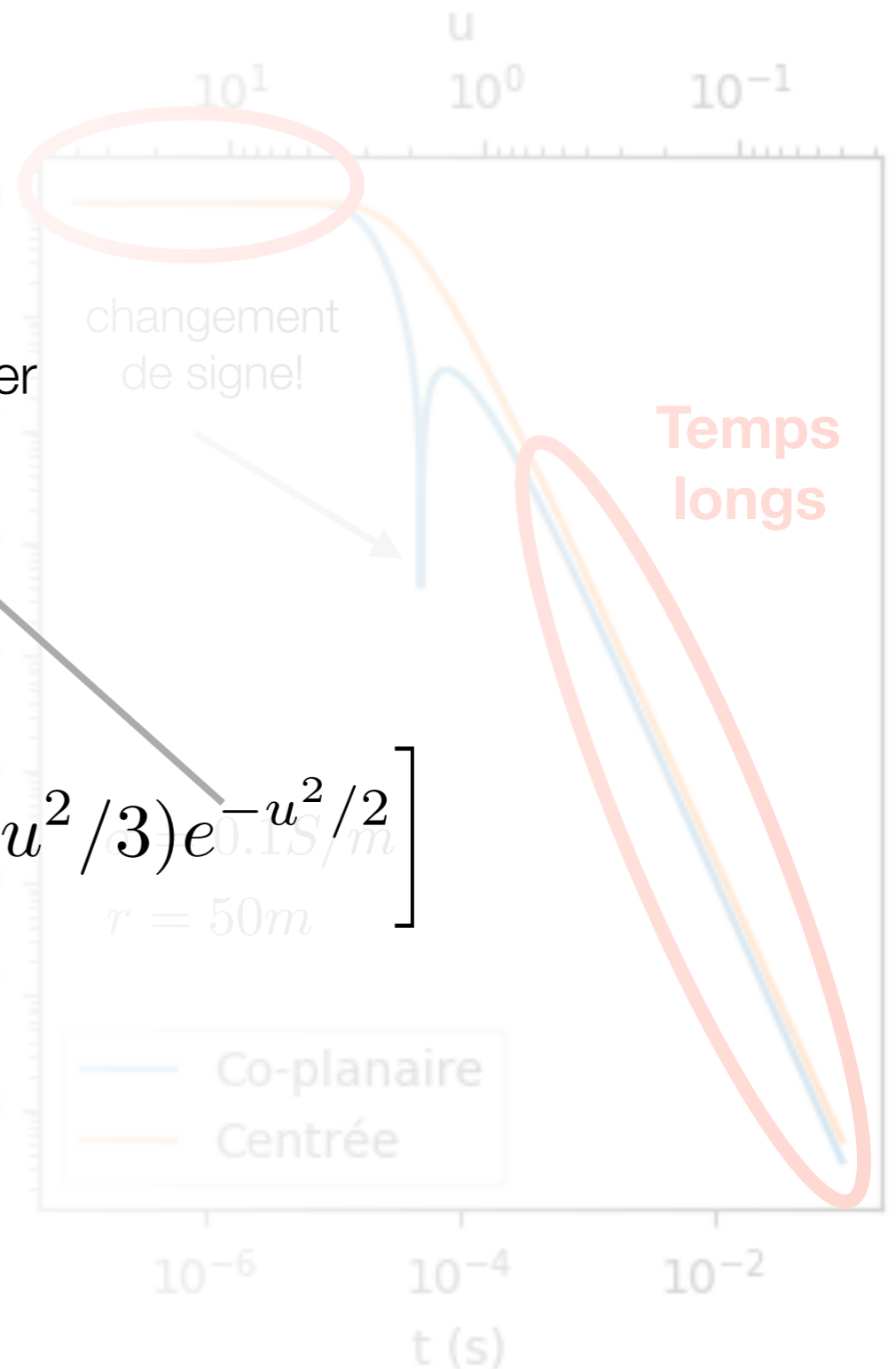
Pour la **boucle centrale**:

$$V_{CI} = \frac{3S_R I_T}{r^3 \sigma} \left[ \operatorname{erf}(u/\sqrt{2}) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} u (1 + u^2/3) e^{-u^2/2} \right]$$

$$V_{CI} \approx \frac{S_R I_T r^2}{20\sqrt{\pi}} \frac{\mu^{5/2} \sigma^{3/2}}{t^{5/2}}$$

Il faut développer en série de Taylor

Temps courts



# Temps longs

Aux temps longs:

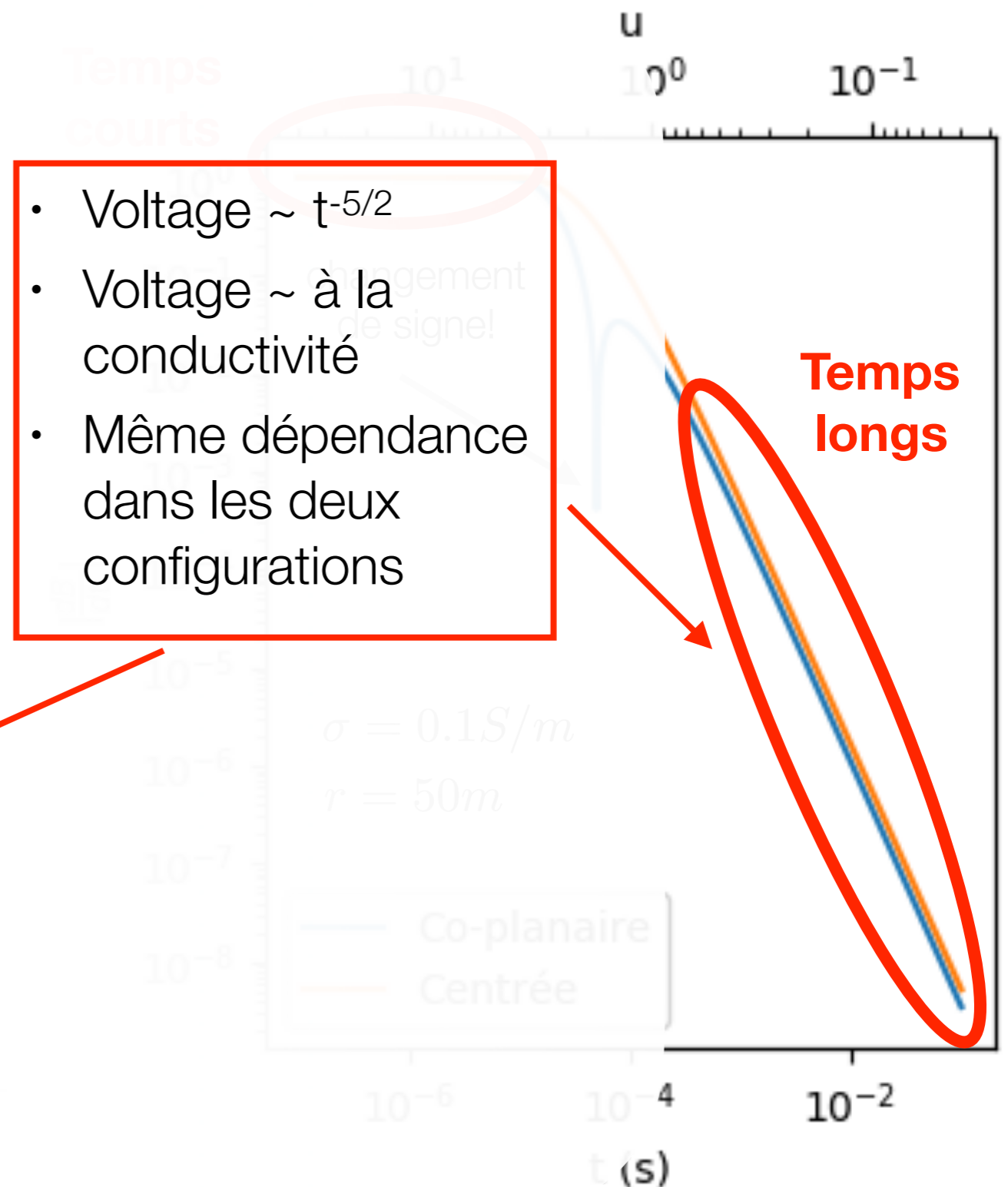
$$u = r / \delta_{TD} = r \sqrt{\frac{\sigma \mu_0}{2t}}$$

$$u \rightarrow \infty$$

Pour les **deux configurations**:

$$V_{CI} = \frac{S_R I_T r^2}{20\sqrt{\pi}} \frac{\mu^{5/2} \sigma^{3/2}}{t^{5/2}}$$

$$V_{HCP} \approx \frac{S_R S_T I_T}{20\pi^{3/2}} \frac{\mu^{5/2} \sigma^{3/2}}{t^{5/2}}$$



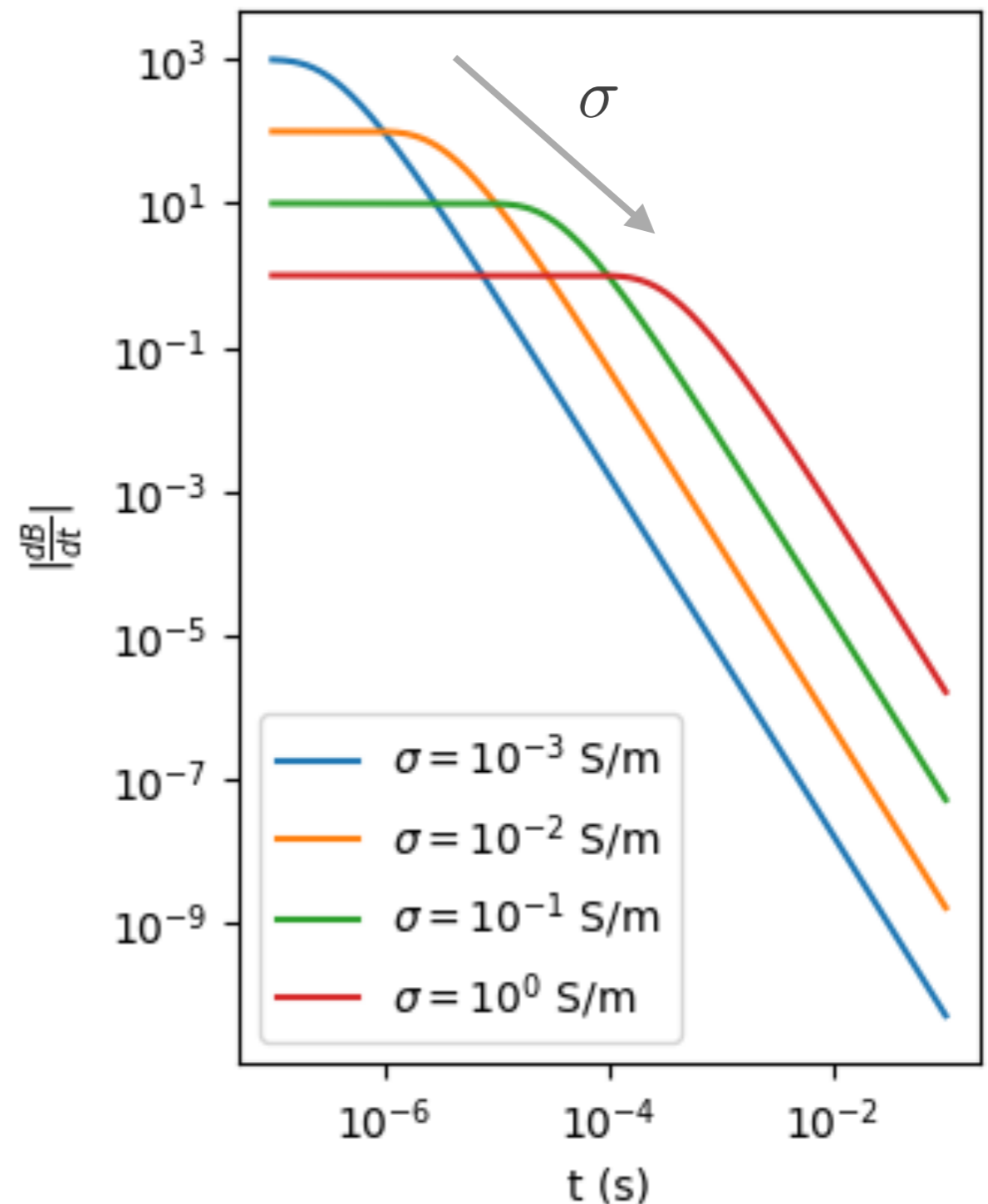
# Variation de la conductivité

Aux temps courts:

$$V_{CI} \approx \frac{3S_R I_T}{r^3 \sigma}$$

Aux temps longs:

$$V_{CI} \approx \frac{S_R I_T r^2}{20\sqrt{\pi}} \frac{\mu^{5/2} \sigma^{3/2}}{t^{5/2}}$$



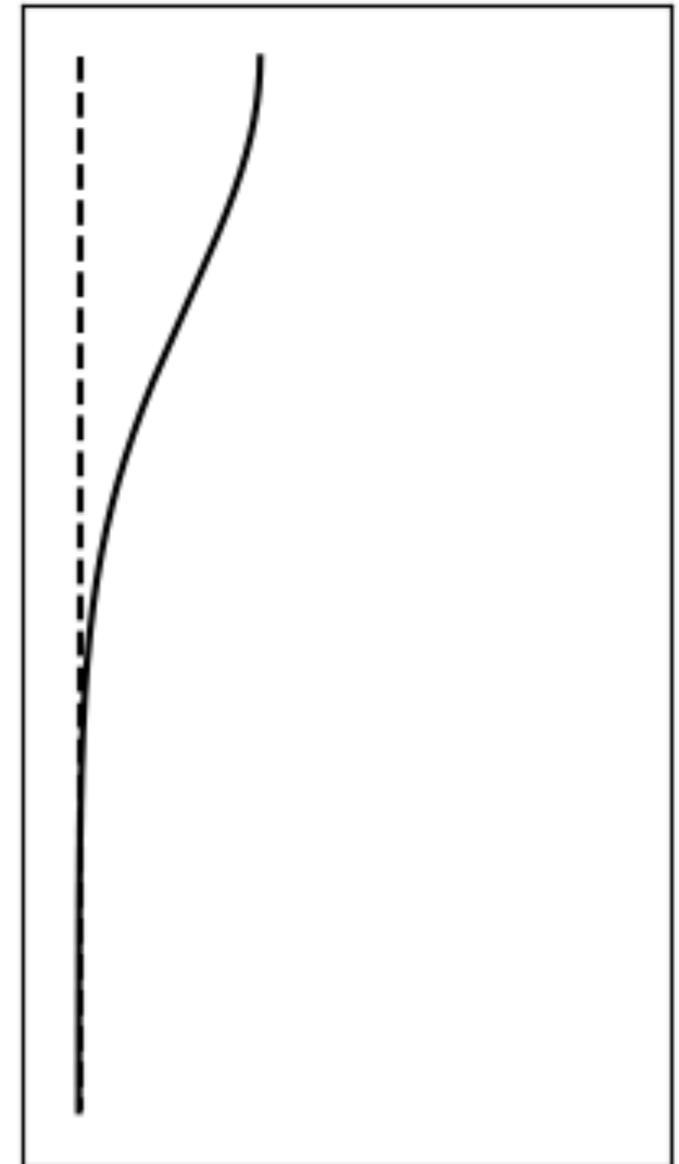
# Milieu tabulaire

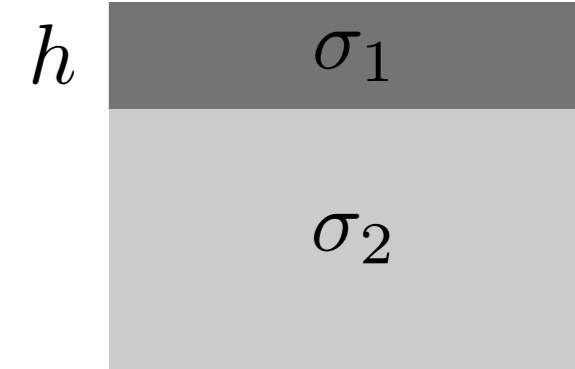
---

Les relations pour des milieux à plusieurs couches sont trop complexes pour voir dans ce cours!

En général, on peut cependant affirmer:

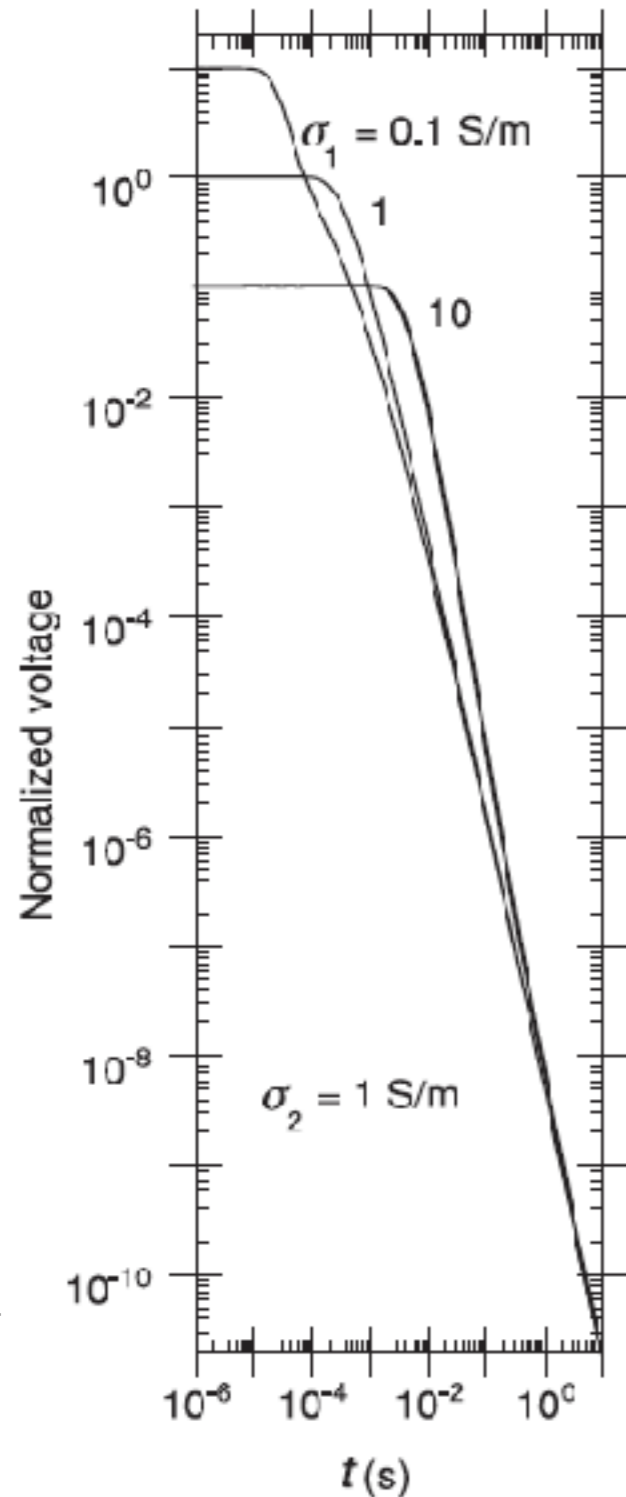
- Aux temps courts,  $\sigma \rightarrow \sigma_1$   
(la conductivité est celle de la première couche)
- Aux temps longs,  $\sigma \rightarrow \sigma_M$   
(la conductivité est celle de la couche à la profondeur du maximum du champ primaire)



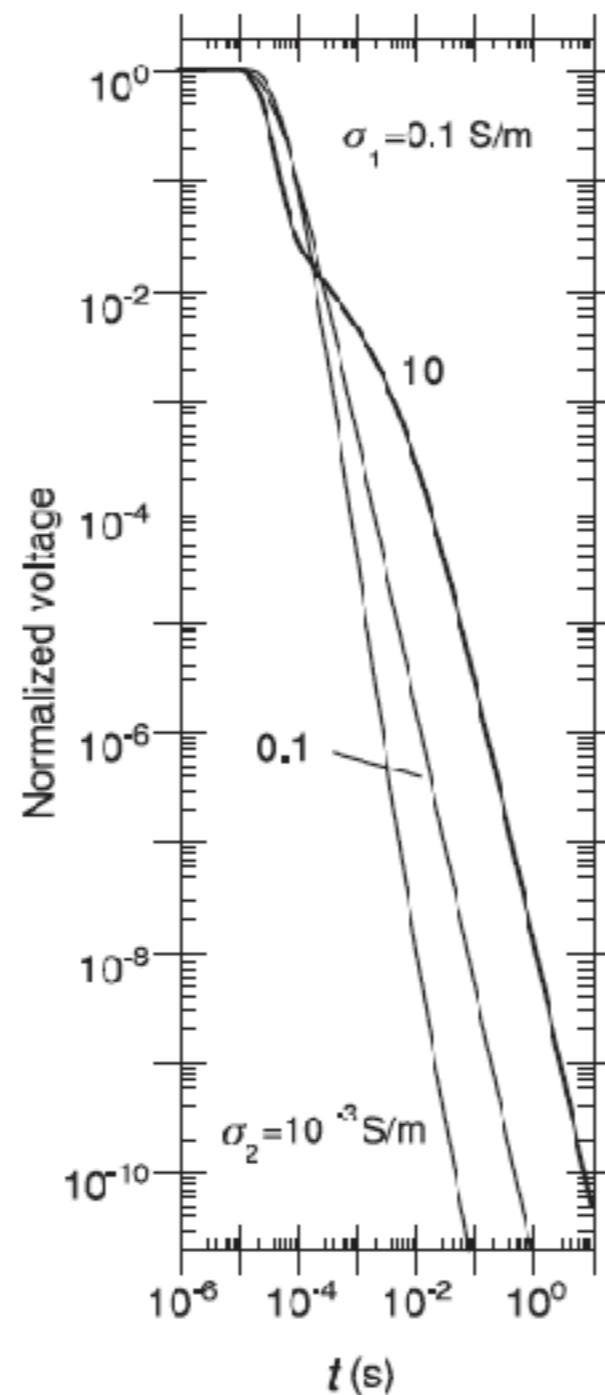


# Mesures pour un milieu à deux couches

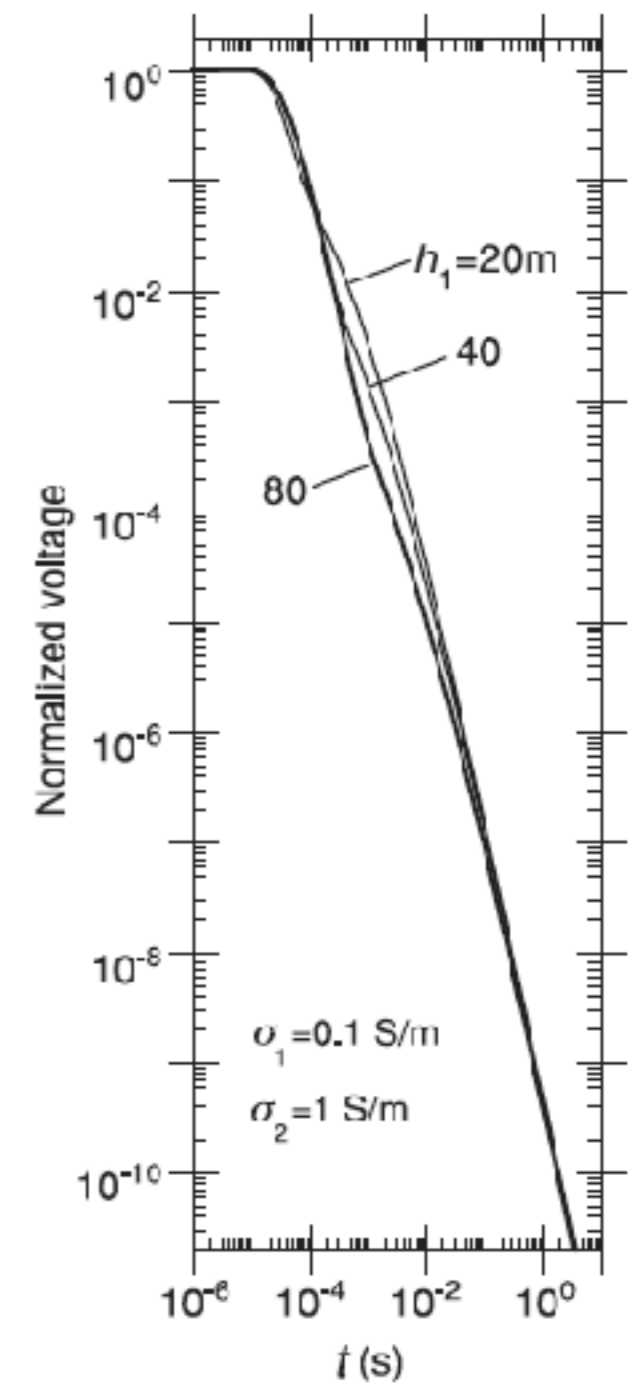
**Variation de  $\sigma_1$**

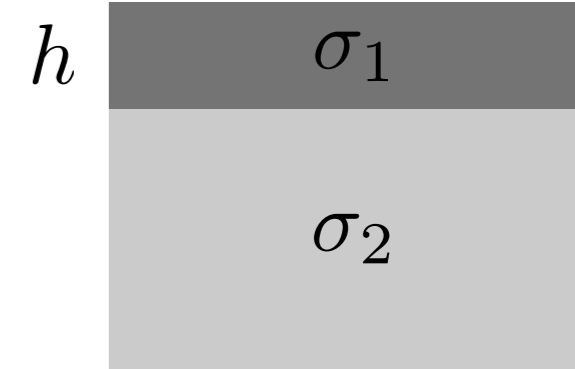


**Variation de  $\sigma_2$**



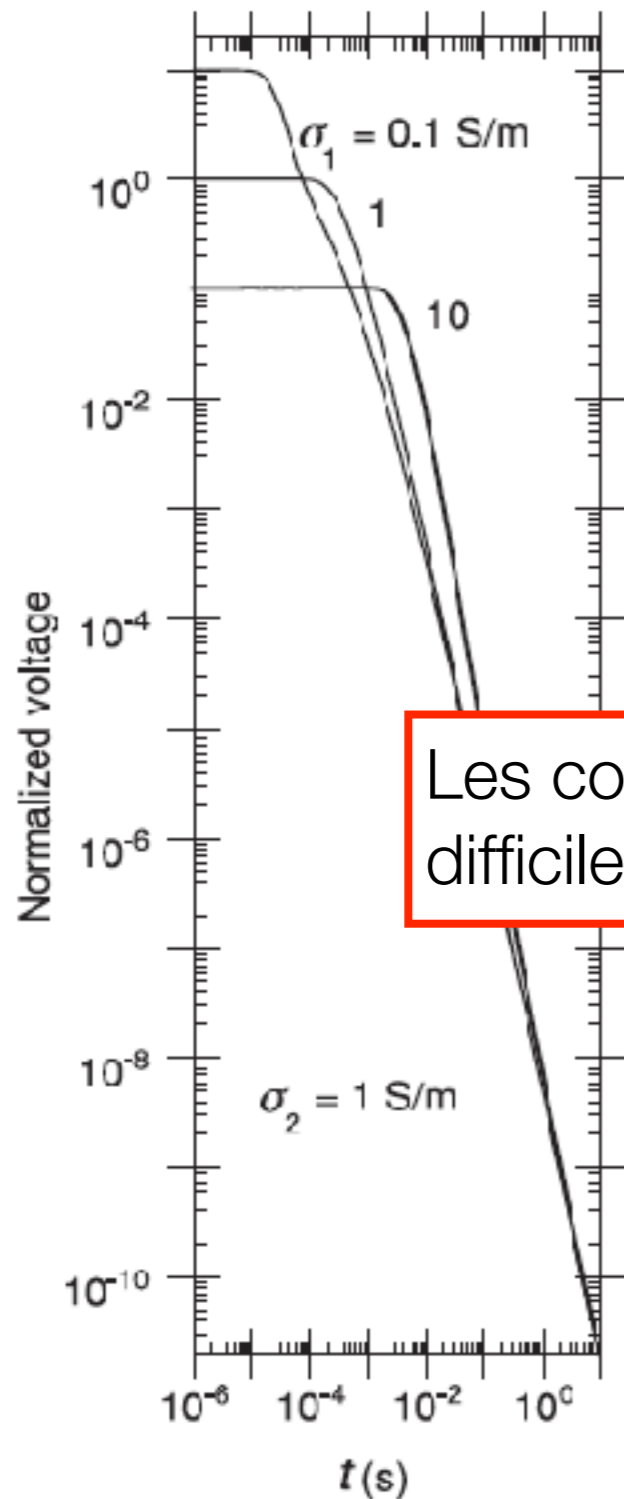
**Variation de  $h$**



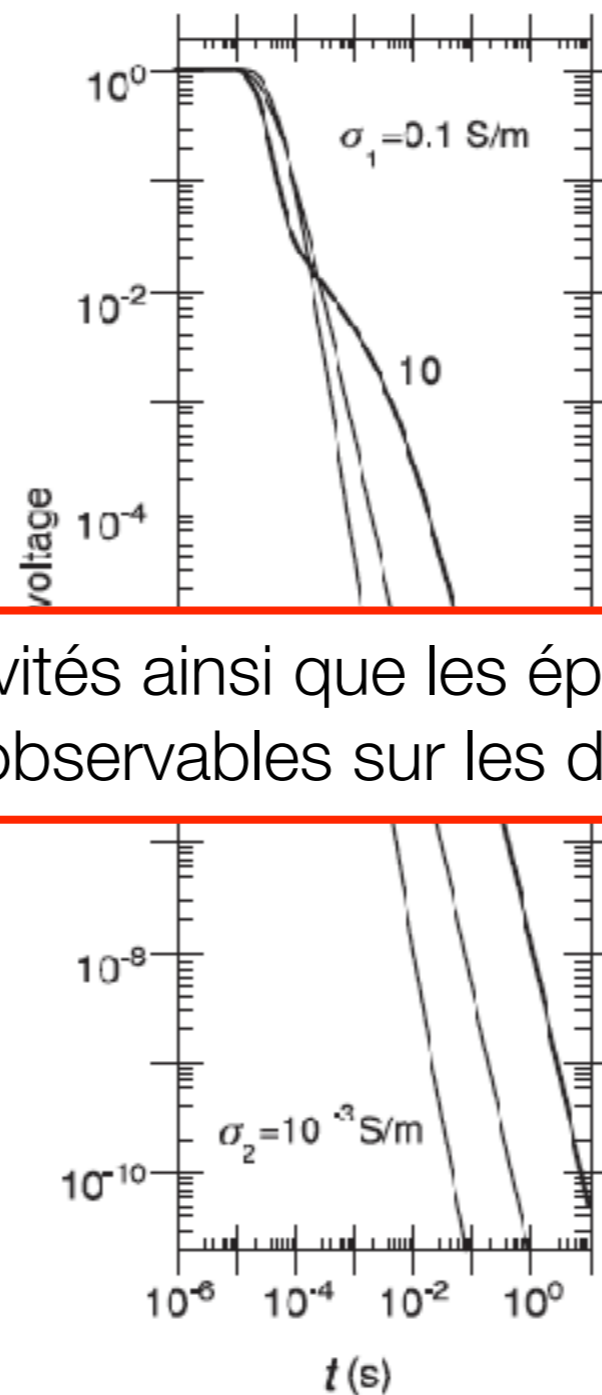


# Mesures pour un milieu à deux couches

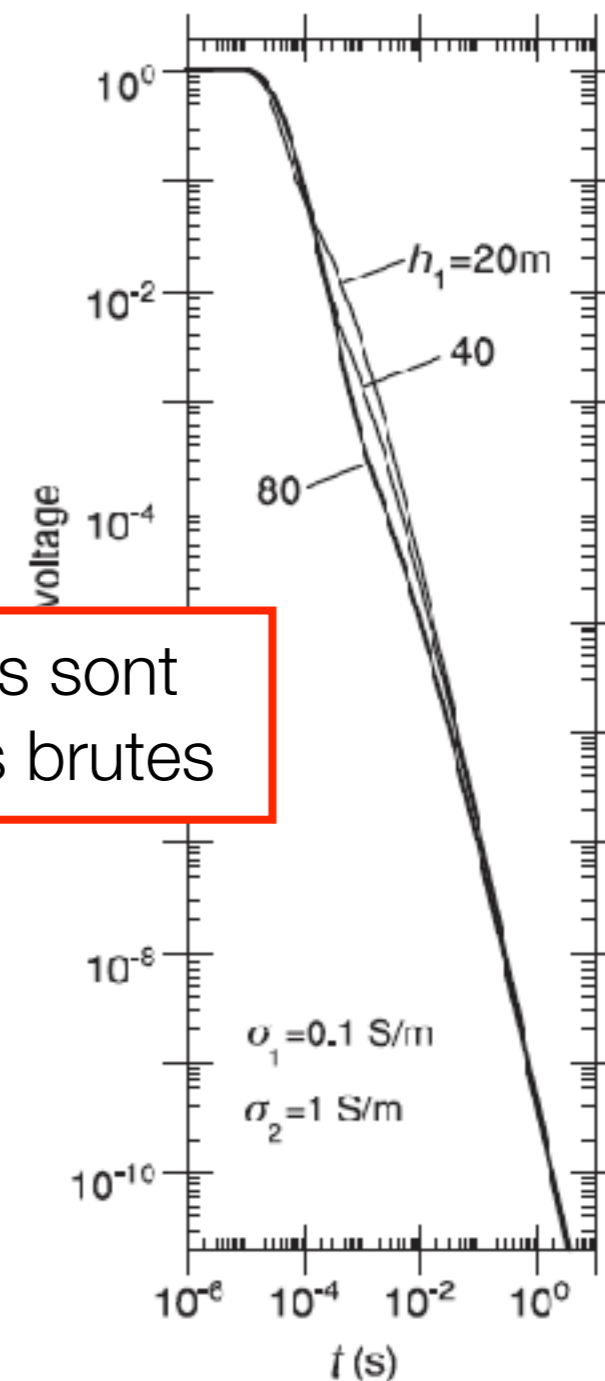
**Variation de  $\sigma_1$**



**Variation de  $\sigma_2$**



**Variation de  $h$**



Les conductivités ainsi que les épaisseurs sont difficilement observables sur les données brutes

# Résistivité apparente


---

On utilise aussi le concept de résistivité apparente en TDEM.

Pour ce faire, on doit isoler la conductivité dans la relation du sol homogène:

$$V_{CI} = \frac{3S_R I_T}{r^3 \sigma} \left[ \operatorname{erf}(u/\sqrt{2}) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} u (1 + u^2/3) e^{-u^2/2} \right]$$

Impossible! Cette équation est non-linéaire.


$$u = r/\delta_{TD} = r \sqrt{\frac{\sigma \mu_0}{2t}}$$

# Résistivité apparente

---

On peut utiliser les deux limites:

- Aux temps courts:

$$V_{CI} \approx \frac{3S_R I_T}{r^3 \sigma} \longrightarrow \rho_a = \frac{-r^3 V_{CI}}{3S_R I_T}$$

- Aux temps longs:

$$V_{CI} = \frac{S_R I_T r^2}{20\sqrt{\pi}} \frac{\mu^{5/2} \sigma^{3/2}}{t^{5/2}} \longrightarrow \rho_a = \frac{\mu}{4\pi t} \left[ \frac{2\pi r^2 \mu S_R I_T}{5t |V_{CI}|} \right]^{2/3}$$



# Résistivité apparente

---

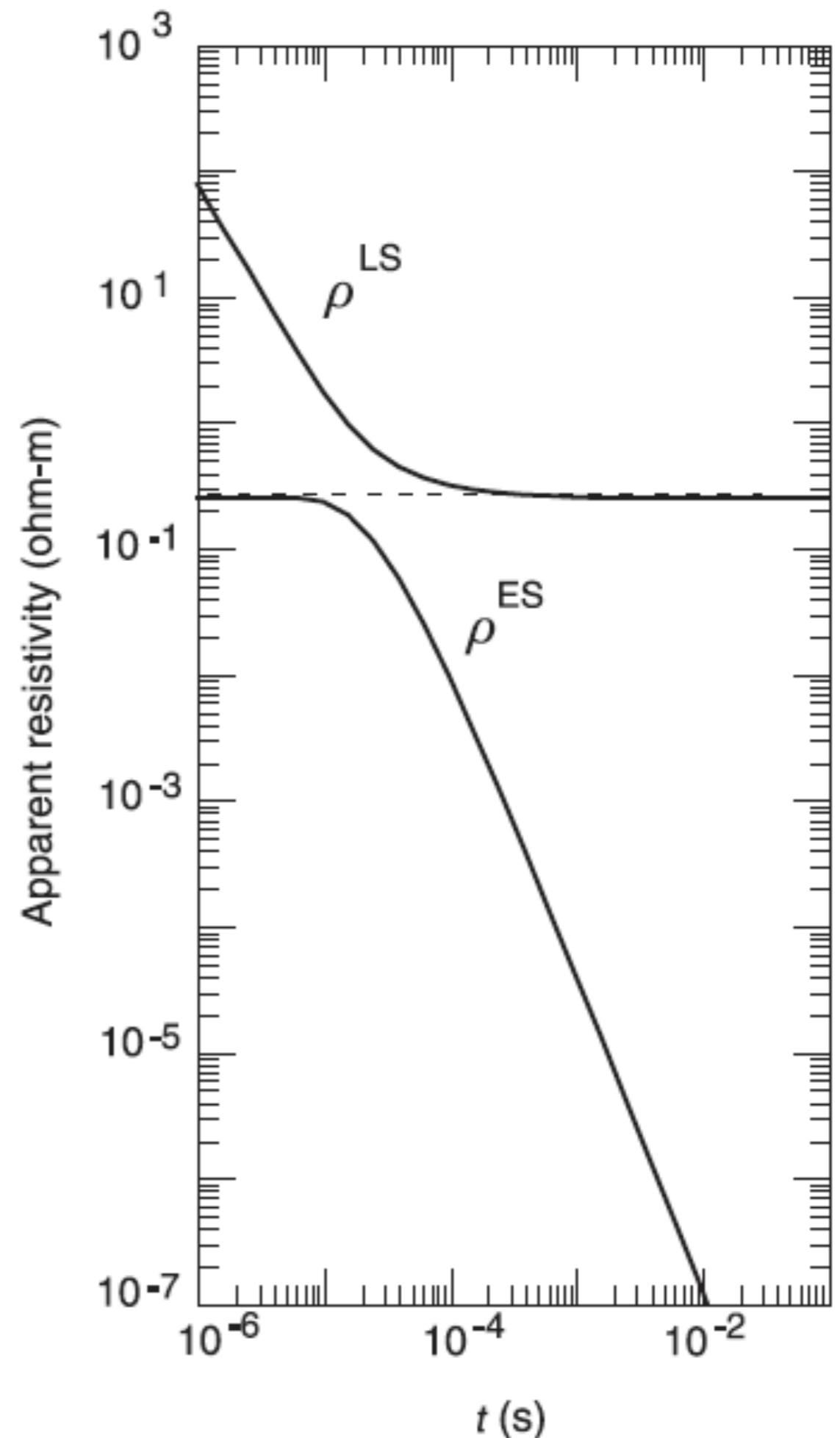
Pour les deux types de configurations:

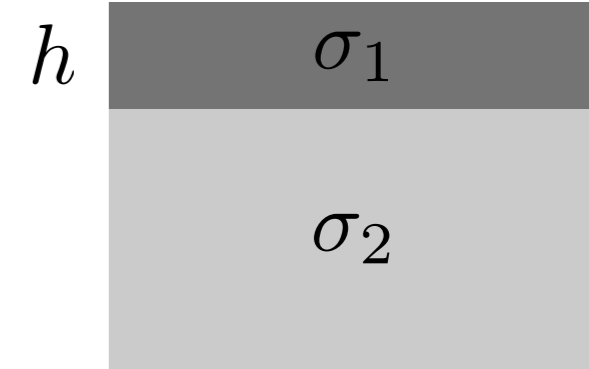
	Temps courts	Temps longs
CI	$\rho_a = \frac{-r^3 V_{CI}}{3S_R I_T}$	$\rho_a = \frac{\mu}{4\pi t} \left[ \frac{2\pi r^2 \mu S_R I_T}{5t  V_{CI} } \right]^{2/3}$
HCP	$\rho_a = \frac{-2\pi r^5 V_{HCP}}{9S_R S_T I_T}$	$\rho_a = \frac{\mu}{4\pi t} \left[ \frac{2\mu S_R S_T I_T}{5t  V_{HCP} } \right]^{2/3}$

# Résistivité apparente

---

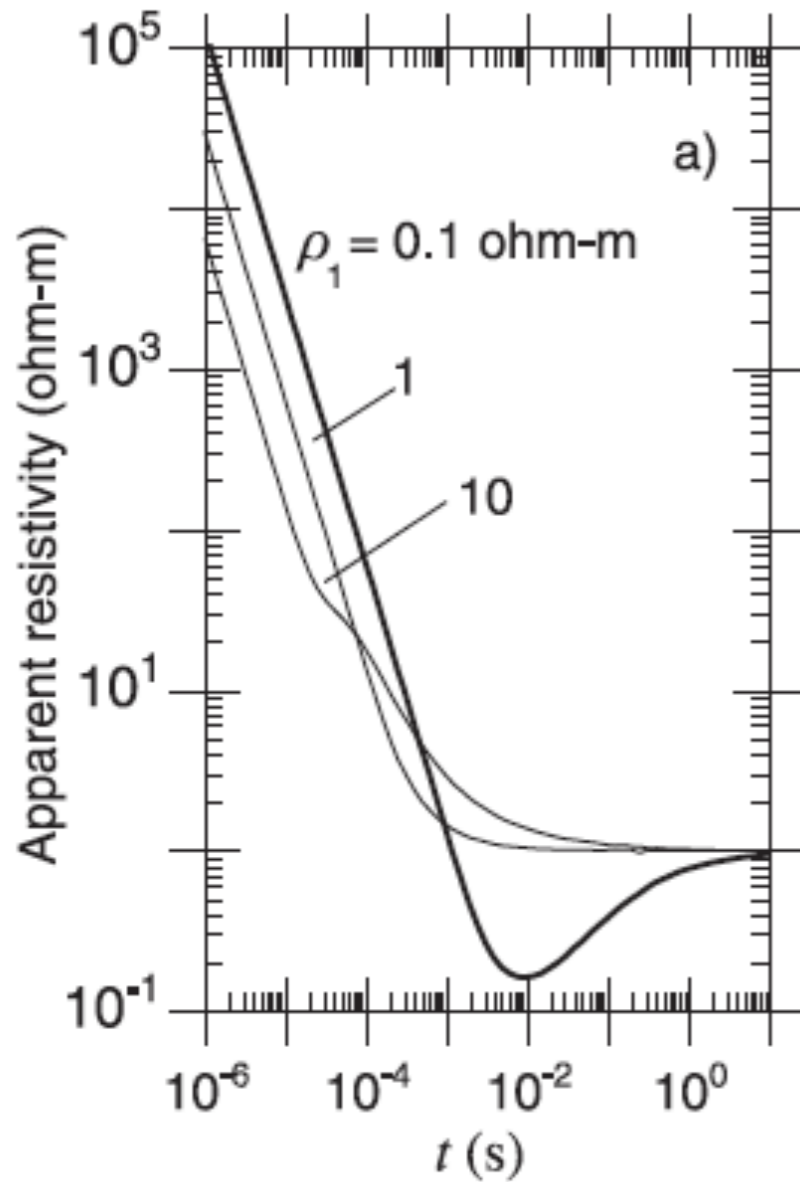
- Les résistivités apparentes aux temps courts et aux temps longs ne donneront évidemment pas les mêmes résultats!
- Aux temps courts, l'approximation temps longs surestiment la résistivité
- Aux temps longs, l'approximation temps courts sous-estime la résistivité
- Aux temps intermédiaires, les deux donnent des valeurs erronées.



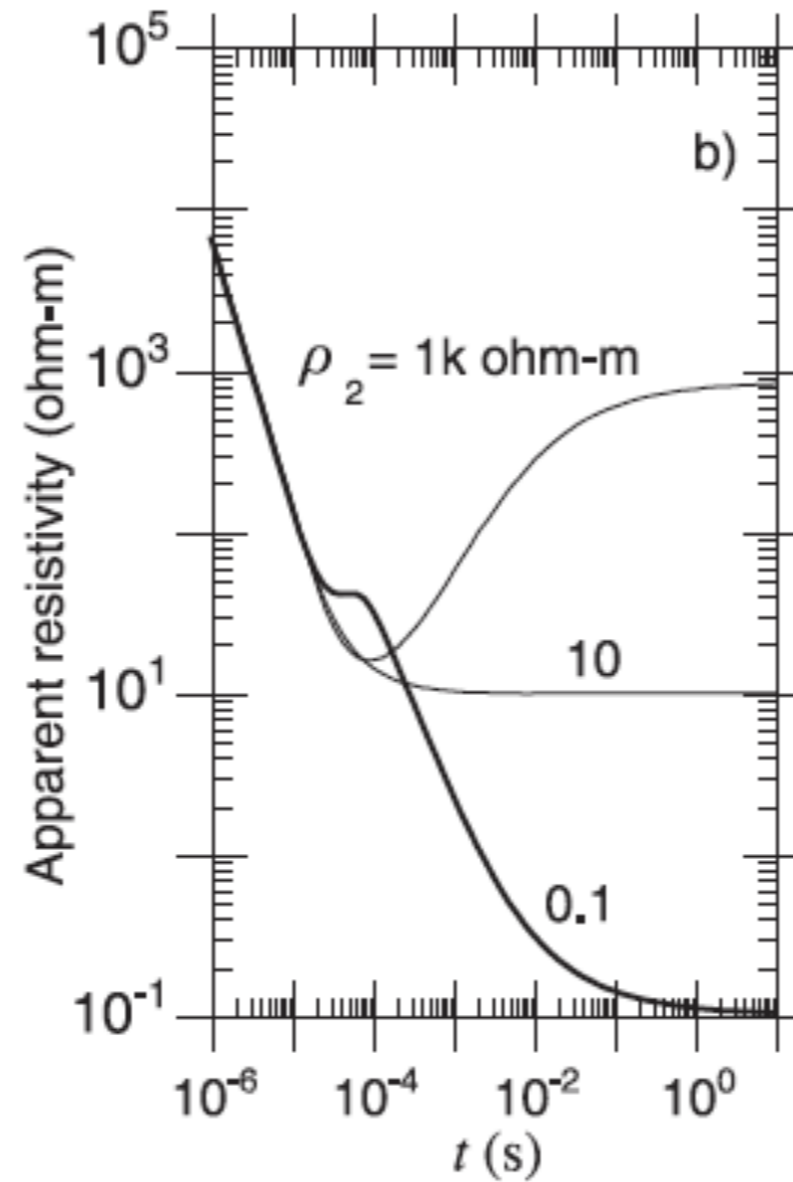


# Résistivité apparente: deux couches

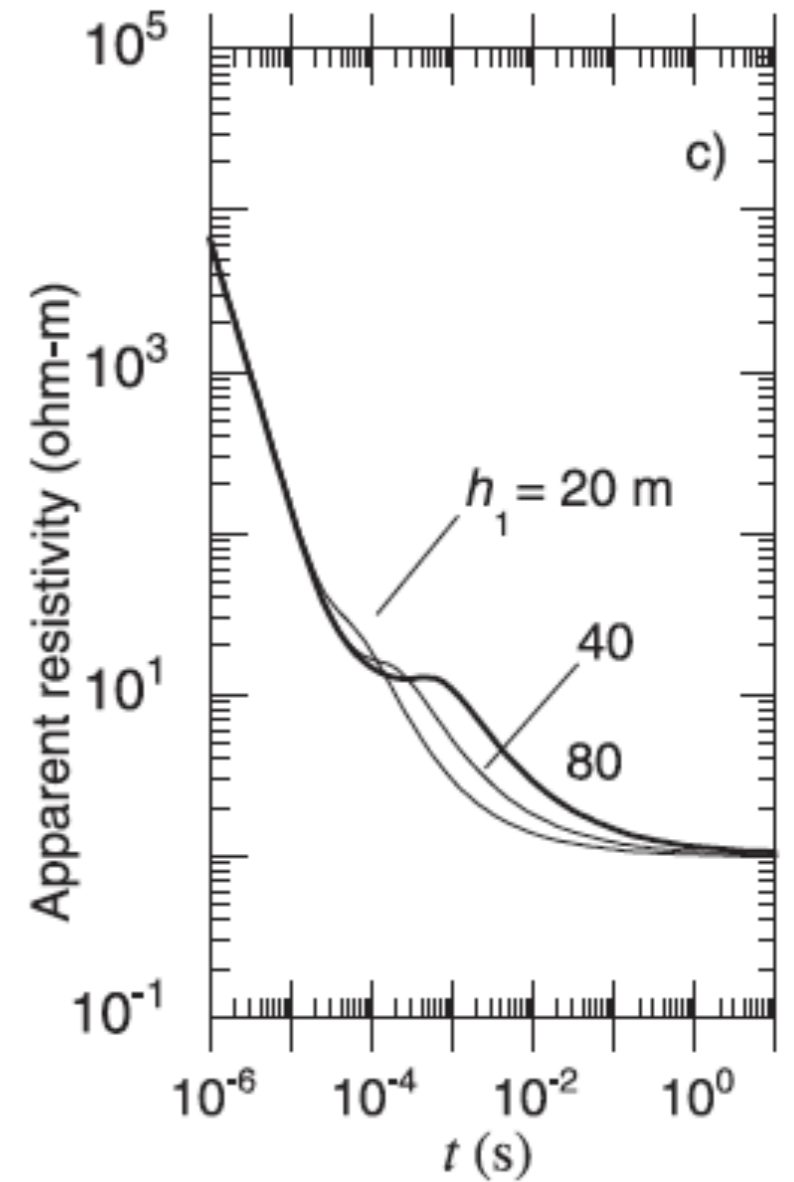
Variation de  $\sigma_1$

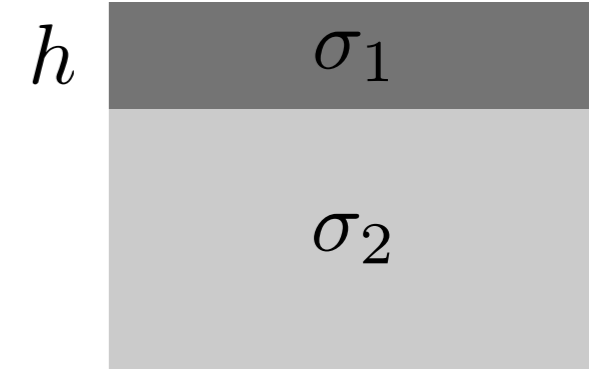


Variation de  $\sigma_2$

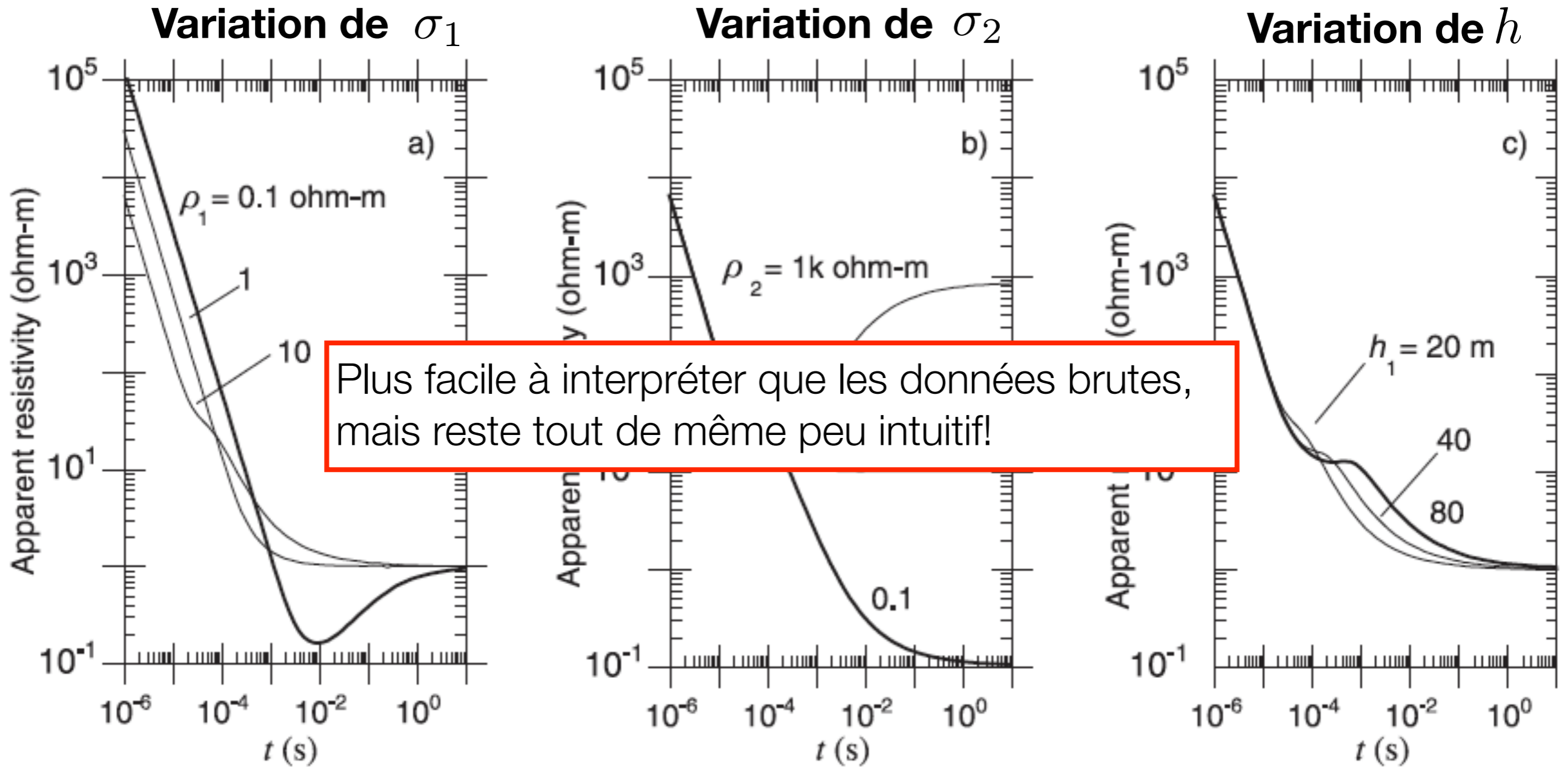


Variation de  $h$





# Résistivité apparente: deux couches



Plus facile à interpréter que les données brutes, mais reste tout de même peu intuitif!