



**POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL**

LE GÉNIE
EN PREMIÈRE CLASSE

Machines et entraînements électriques

ELE8401

Keyhan Sheshyekani

École Polytechnique de Montréal
e-mail: Keyhan.sheshyekani@polymtl.ca

Hiver 2019

Concept de changement de référentiel

Nous avons trouvé que certaines des inductances de la machine sont fonction de la position du rotor

Donc les coefficients des équations différentielles (équations de tension) dépend de la position du rotor: variable en temps

Un changement de variables (transformation) est souvent utilisé pour réduire la complexité de ces équations différentielles

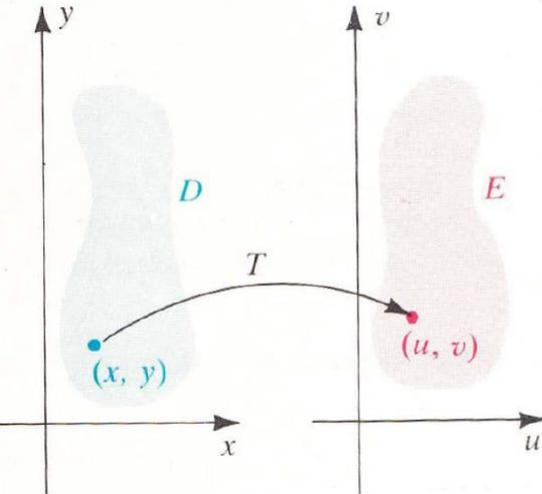
Cette transformation générale transfère les variables dans un référentiel qui tourne à une vitesse angulaire arbitraire

Concept de changement de référentiel

Applications:

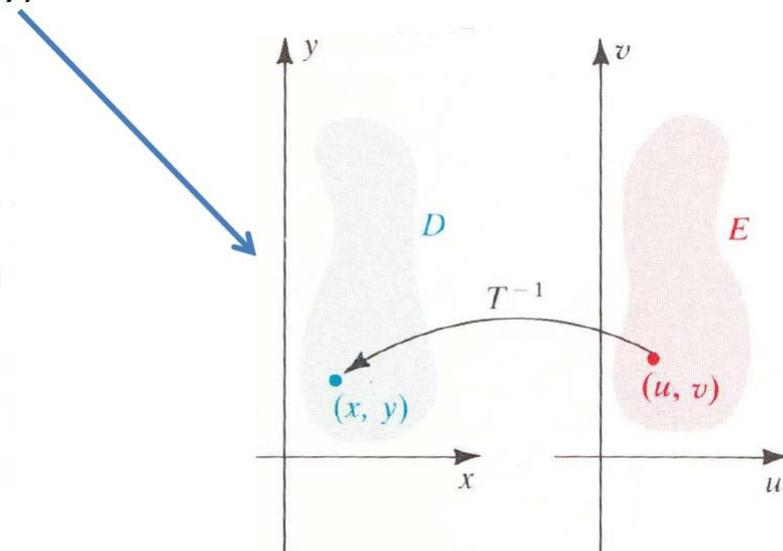
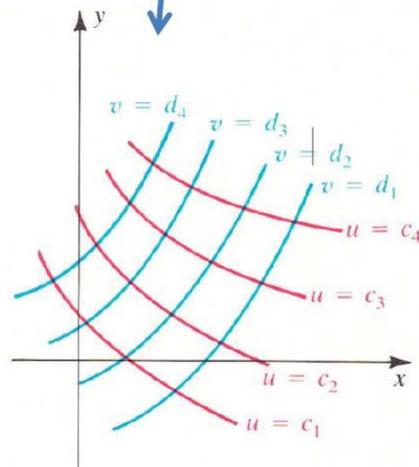
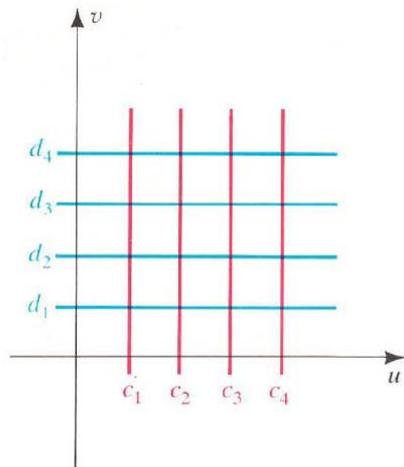
- machines à courant alternatif
- systèmes d'alimentation statiques
- l'électronique de puissance
- Entraînement électrique
- Contrôle
- Tant d'autres.....

Concept de changement de référentiel



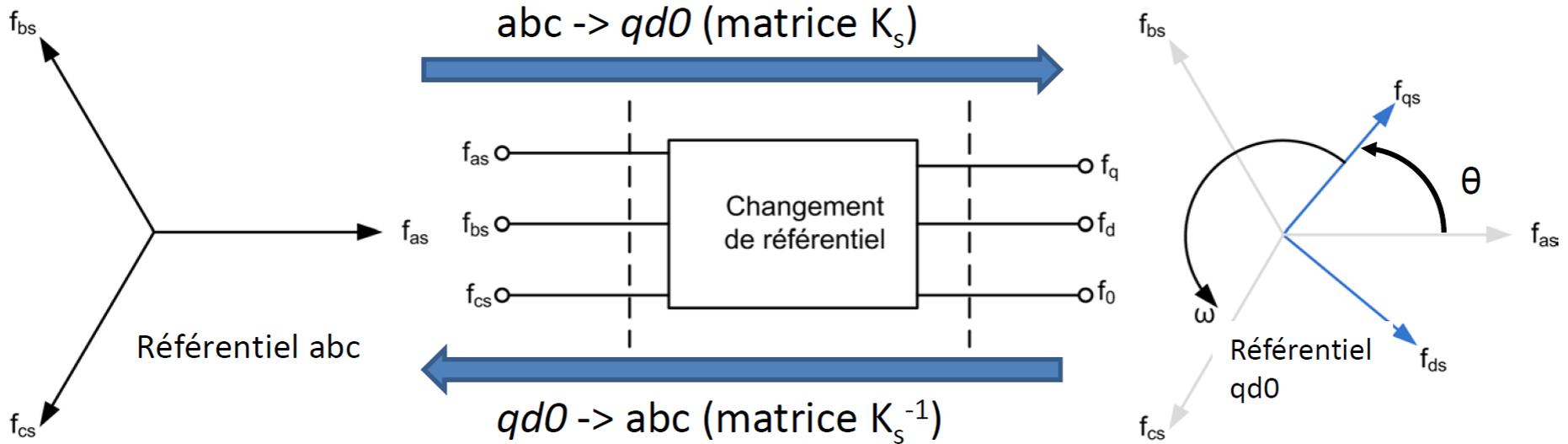
- Le concept de changement de variable en mathématique (mapping) consiste à transférer les valeurs d'une fonction définie dans un plan (x, y) vers un plan (u, v) à l'aide d'une relation 'T'.

- La relation 'T' est généralement injective (bidirectionnelle) ce qui permet d'effectuer la transformation inverse (du plan (u, v) vers le plan (x, y)).



Concept de changement de référentiel

- Le changement de référentiel consiste principalement en la transposition de variables (courants, tensions) dans un référentiel donné vers un second référentiel.



- À la base, le concept est identique à celui du Mapping en mathématique.
- La grande particularité ici c'est que le mapping s'effectue par le biais de matrices qui varient temporellement (une matrice de transformation directe (K_s) et une matrice de transformation inverse (K_s^{-1}))

Concept de changement de référentiel

Pour un système de variables arbitraires (\mathbf{f}_{abc}), la transformation de référentiel direction (abc à qd0) est donnée par:

$$[\mathbf{f}_{qd0}] = [\mathbf{K}_s] [\mathbf{f}_{abc}] \quad (1)$$

où \mathbf{f} désigne des tensions, des courants ou des flux. Également, Ou charge électrique

$$[\mathbf{f}_{qd0}]^T = [f_q \ f_d \ f_0] \quad (2)$$

$$[\mathbf{f}_{abc}]^T = [f_a \ f_b \ f_c] \quad (3)$$

Remarque : Pour un système balancé, la composante homopolaire (0) est toujours nulle.

Les matrices de transformation directe (\mathbf{K}_s) et inverse (\mathbf{K}_s^{-1}) sont données par

$$\mathbf{K}_s = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\theta) & \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{K}_s^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Concept de changement de référentiel

$$\mathbf{K}_s = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin \theta & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Park Transformation

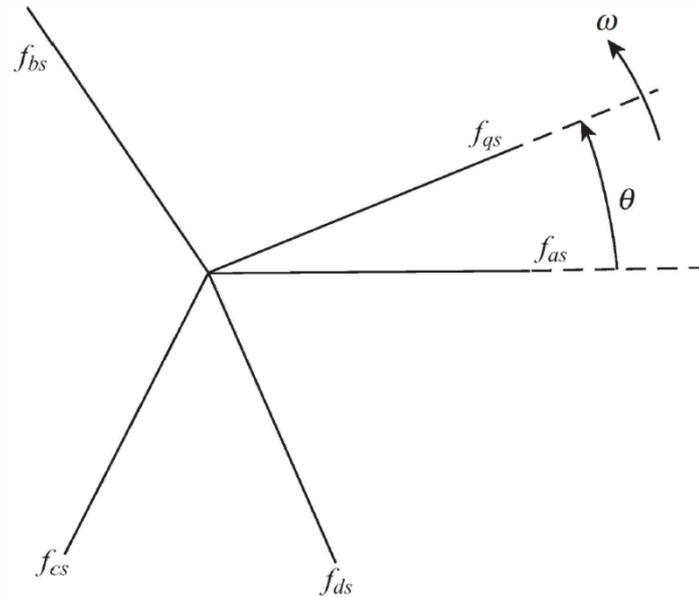
où la position angulaire et la vitesse du référentiel arbitraire sont liées: $\frac{d\theta}{dt} = \omega$

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau + \theta_0$$

Remarque:

- Le cadre de référence peut tourner à n'importe quelle vitesse angulaire constante ou variable, ou il peut rester stationnaire.
- Le changement de variables peut être appliqué à des variables de toute forme d'onde et séquence temporelle; cependant, la transformation donnée ci-dessus est particulièrement appropriée pour une séquence *abc*.

Concept de changement de référentiel

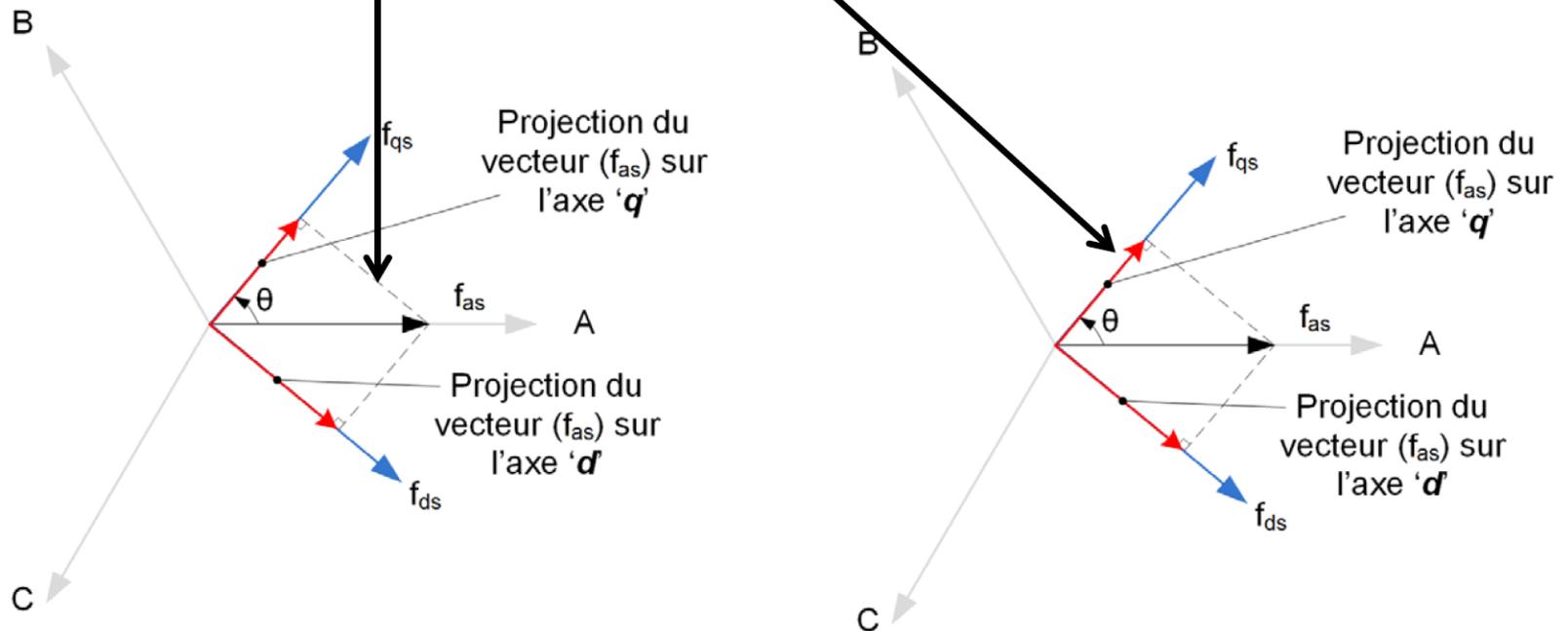


on peut considérée la direction de f_{as} , f_{bs} et f_{cs} comme la direction des axes magnétiques des enroulements du stator et la direction de f_{ds} et f_{qs} peut être considérée comme la direction des axes magnétiques des "nouveaux" enroulements créés par le changement de variables.

Concept de changement de référentiel

Projection des vecteurs abc sur un référentiel tournant qd : cas spécifique du vecteur a

$$\begin{bmatrix} f_q \\ f_d \\ f_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \boxed{\cos(\theta)} & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \boxed{\sin(\theta)} & \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



Concept de changement de référentiel

1. Résistance

$$\mathbf{v}_{abc s} = \mathbf{r}_s \mathbf{i}_{abc s} \longrightarrow \mathbf{v}_{qd0s} = \mathbf{K}_s \mathbf{r}_s (\mathbf{K}_s)^{-1} \mathbf{i}_{qd0s}$$

Remarque:

- Si les éléments non nuls de la matrice diagonale \mathbf{r}_s sont égaux: $\mathbf{K}_s \mathbf{r}_s (\mathbf{K}_s)^{-1} = \mathbf{r}_s$
- si chaque phase du circuit actuel a la même résistance $[\mathbf{r}_s]_{dq0} = [\mathbf{r}_s]_{abc}$
- si les résistances de phase sont déséquilibrées, la transformation ne produit des résistances constantes que si le cadre de référence est fixé.

Concept de changement de référentiel

2. Inductance

$$\mathbf{v}_{abcs} = p\boldsymbol{\lambda}_{abcs} \longrightarrow \mathbf{v}_{qd0s} = \mathbf{K}_s p[(\mathbf{K}_s)^{-1}\boldsymbol{\lambda}_{qd0s}]$$

On pose que:

$$\mathbf{v}_{qd0s} = \mathbf{K}_s p[(\mathbf{K}_s)^{-1}]\boldsymbol{\lambda}_{qd0s} + \mathbf{K}_s (\mathbf{K}_s)^{-1} p\boldsymbol{\lambda}_{qd0s}$$

$$p[(\mathbf{K}_s)^{-1}] = \omega \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{K}_s p[(\mathbf{K}_s)^{-1}] = \omega \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Concept de changement de référentiel

$$\mathbf{v}_{qd0s} = \mathbf{K}_s p [(\mathbf{K}_s)^{-1}] \boldsymbol{\lambda}_{qd0s} + \mathbf{K}_s (\mathbf{K}_s)^{-1} p \boldsymbol{\lambda}_{qd0s} \quad \& \quad \mathbf{K}_s p [(\mathbf{K}_s)^{-1}] = \omega \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{qd0s} = \omega \boldsymbol{\lambda}_{dqs} + p \boldsymbol{\lambda}_{qd0s} \quad \text{et} \quad (\boldsymbol{\lambda}_{dqs})^T = [\lambda_{ds} \quad -\lambda_{qs} \quad 0]$$

$v_{qs} = \omega \lambda_{ds} + p \lambda_{qs}$
 $v_{ds} = -\omega \lambda_{qs} + p \lambda_{ds}$
 $v_{0s} = p \lambda_{0s}$

$\omega \lambda_{ds}$ et $-\omega \lambda_{qs}$ sont valables, peu importe si le système est magnétiquement linéaire ou non linéaire

tension de vitesse avec la vitesse étant la vitesse angulaire du cadre de référence arbitraire

Concept de changement de référentiel

2. Inductance

Pour un système linéaire, les liaisons de flux peuvent être exprimées

$$\boldsymbol{\lambda}_{abcs} = \mathbf{L}_s \mathbf{i}_{abcs}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{qd0s} = \mathbf{K}_s \mathbf{L}_s (\mathbf{K}_s)^{-1} \mathbf{i}_{qd0s}$$

1. Si, par exemple, \mathbf{L}_s est une matrice diagonale avec tous les termes non nuls égaux, alors

$$\mathbf{K}_s \mathbf{L}_s (\mathbf{K}_s)^{-1} = \mathbf{L}_s$$

2. Si, par exemple, \mathbf{L}_s est une matrice non-diagonale:

$$\mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} L_s & M & M \\ M & L_s & M \\ M & M & L_s \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{K}_s \mathbf{L}_s (\mathbf{K}_s)^{-1} = \begin{bmatrix} L_s - M & 0 & 0 \\ 0 & L_s - M & 0 \\ 0 & 0 & L_s + 2M \end{bmatrix}$$

Concept de changement de référentiel

Remarque:

- Pour un système symétrique, $\mathbf{K}_s \mathbf{L}_s (\mathbf{K}_s)^{-1} = \mathbf{L}_s$ donne une matrice diagonale qui, en effet, dissocie magnétiquement les variables dans tous les cadres de référence. C'est une caractéristique très importante de la transformation.
- Pour les systèmes magnétiques asymétriques comme la machine synchrone à pôles saillants, il n'y a qu'un cadre de référence, le cadre de référence tournant à la vitesse angulaire électrique du rotor, dans lequel les variables dq ne sont pas couplées magnétiquement.

Concept de changement de référentiel

Exemple:

Considérons un circuit RL triphasé défini par

Domaine dq0

$$v_{qs} = r_s i_{qs} + \omega \lambda_{ds} + p \lambda_{qs}$$

$$v_{ds} = r_s i_{ds} - \omega \lambda_{qs} + p \lambda_{ds}$$

$$v_{0s} = r_s i_{0s} + p \lambda_{0s}$$

$$\mathbf{K}_s \mathbf{L}_s (\mathbf{K}_s)^{-1} = \begin{bmatrix} L_{ls} + \frac{3}{2} L_{ms} & 0 & 0 \\ 0 & L_{ls} + \frac{3}{2} L_{ms} & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_s = \text{diag}[r_s \quad r_s \quad r_s]$$

$$\mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} L_{ls} + L_{ms} & -\frac{1}{2} L_{ms} & -\frac{1}{2} L_{ms} \\ -\frac{1}{2} L_{ms} & L_{ls} + L_{ms} & -\frac{1}{2} L_{ms} \\ -\frac{1}{2} L_{ms} & -\frac{1}{2} L_{ms} & L_{ls} + L_{ms} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{qs} = \left(L_{ls} + \frac{3}{2} L_{ms} \right) i_{qs}$$

$$\lambda_{ds} = \left(L_{ls} + \frac{3}{2} L_{ms} \right) i_{ds}$$

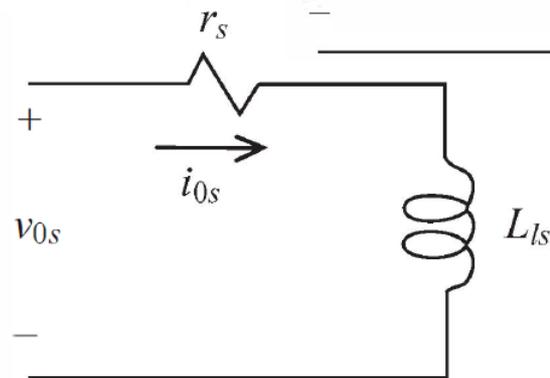
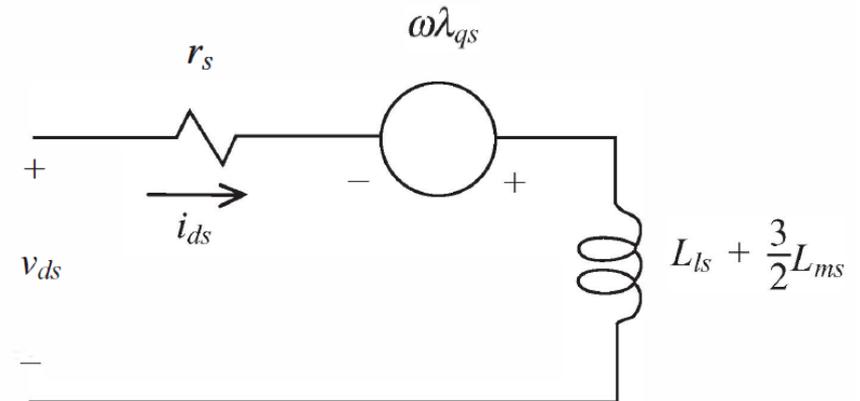
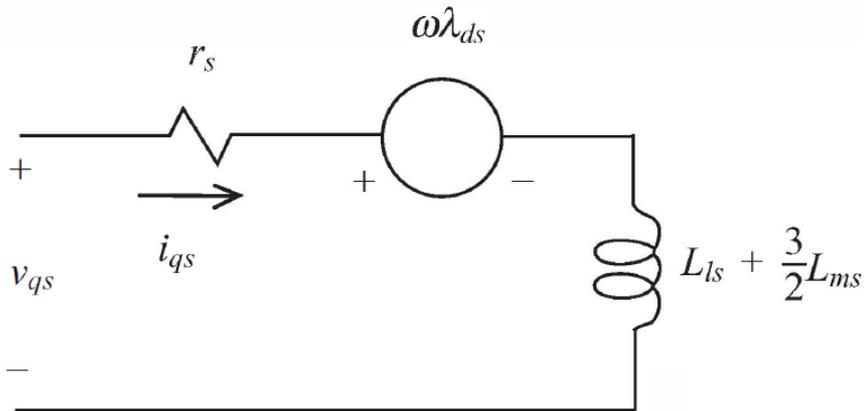
$$\lambda_{0s} = L_{ls} i_{0s}$$

Concept de changement de référentiel

$$v_{qs} = r_s i_{qs} + \omega \lambda_{ds} + p \lambda_{qs} \quad \lambda_{qs} = \left(L_{ls} + \frac{3}{2} L_{ms} \right) i_{qs}$$

$$v_{ds} = r_s i_{ds} - \omega \lambda_{qs} + p \lambda_{ds} \quad \lambda_{ds} = \left(L_{ls} + \frac{3}{2} L_{ms} \right) i_{ds}$$

$$v_{0s} = r_s i_{0s} + p \lambda_{0s} \quad \lambda_{0s} = L_{ls} i_{0s}$$



Circuits équivalents
arbitraires de référence
pour circuit RL triphasé

Q1: Quelle est la meilleure vitesse de référentiel pour résoudre l'équation d'un circuit statique? C'est quoi pour les machines électriques?



Transformation d'un système triphasé équilibré

En posant que les tensions d'alimentation d'un système triphasé sont données par

$$[\mathbf{V}_{abc}]^T = \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{pk} \cos(\theta_v) \\ V_{pk} \cos(\theta_v - \frac{2\pi}{3}) \\ V_{pk} \cos(\theta_v + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} V_{pk} : \text{tension crête de la source (V)} \\ \theta_v : \text{angle du phaseur de tension de} \\ \text{la phase } a \text{ (par rapport à l'angle} \\ \text{zéro)} \end{array} \quad (6)$$

et que les courants tirés par cette source sont donnés par

$$[\mathbf{i}_{abc}]^T = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{pk} \cos(\theta_i) \\ i_{pk} \cos(\theta_i - \frac{2\pi}{3}) \\ i_{pk} \cos(\theta_i + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} i_{pk} : \text{courant crête de la source (V)} \\ \theta_i : \text{angle du phaseur du courant de} \\ \text{la phase } a \text{ (par rapport à l'angle} \\ \text{zéro)} \end{array} \quad (7)$$

En utilisant l'angle θ_v de la source de tension pour effectuer la transformation de référentiel des courants dans abc vers $qd0$ (c-à-d que $\theta = \theta_v$ dans (4)) il peut être démontré que les composantes $qd0$ des courants tirés de cette source de tension dans ce nouveau référentiel sont donnés par

$$[\mathbf{i}_{qd0}]^T = \begin{bmatrix} i_q \\ i_d \\ i_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{pk} \cos(\theta_v - \theta_i) \\ i_{pk} \sin(\theta_v - \theta_i) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Transformation d'un système triphasé balancé

Remarques fondamentales sur le résultat de la transformation

1) Si le courant tiré de la source est en phase avec la tension de cette source, la composante i_q est égale au courant crête tiré de la source tandis que le courant i_d est nul. La composante i_q est donc la composante crête de la partie réelle du courant (partie active, en phase avec la tension.)

2) Si le courant tiré de la source est hors phase de $\pm 90^\circ$ (courants capacitifs ou inductifs respectivement) avec la tension de cette source, la composante i_d est égale au courant crête tiré de la source tandis que le courant i_q est nul. La composante i_d est donc la composante crête de la partie imaginaire du courant (partie réactive, déphasée de $\pm 90^\circ$ avec la tension.)

3) L'angle zéro est toujours mesuré par rapport à la phase A de la source de tension. La source de tension doit être représentée par des fonctions cosinus et non sinus pour que les remarques précédentes s'appliquent correctement. Si la source est de type sinus, les axes q et d seront inversés.

System de référentiel le plus commun

Reference- Frame Speed	Interpretation	Notation	
		Variables	Transformation
ω (unspecified)	Stationary circuit variables referred to an arbitrary reference frame	\mathbf{f}_{qd0s} or f_{qs}, f_{ds}, f_{0s}	\mathbf{K}_s
0	Stationary circuit variables referred to a stationary reference frame	\mathbf{f}_{qd0s}^s or $f_{qs}^s, f_{ds}^s, f_{0s}$	\mathbf{K}_s^s
ω_r	Stationary circuit variables referred to a reference frame fixed in the rotor	\mathbf{f}_{qd0s}^r or $f_{qs}^r, f_{ds}^r, f_{0s}$	\mathbf{K}_s^r
ω_e	Stationary circuit variables referred to a synchronously rotating reference frame	\mathbf{f}_{qd0s}^e or $f_{qs}^e, f_{ds}^e, f_{0s}$	\mathbf{K}_s^e

Remarque:

- ω_e est la vitesse angulaire électrique du champ magnétique rotatif d'entrefer établi par des courants de stator de fréquence fondamentale.
- Puisque les variables $\langle 0s \rangle$ ne sont pas associées à un cadre de référence, un index surélevé n'est pas utilisé pour $\langle f_{0s} \rangle$.

System de référentiel le plus commun

Q2: Nous savons que le bobinage de $\langle f_{0s} \rangle$ n'a aucun couplage avec les bobinages de $\langle d \rangle$ et $\langle q \rangle$. Alors comment le montrer dans le plan $d-q$?



Clarke's Transformation (Stationary Reference Frame)

$$f_{qs}^s, f_{ds}^s, f_{0s}^s \longleftrightarrow f_{\alpha}, f_{\beta}, \text{ and } f_0$$

$$\begin{bmatrix} x_{\alpha}(t) \\ x_{\beta}(t) \\ x_0(t) \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}$$

Ou sous la forme complexe

$$x_{\alpha\beta} = x_{\alpha} + jx_{\beta} = \frac{2}{3} (x_a + e^{j120^\circ} x_b + e^{-j120^\circ} x_c)$$

La transformation de Clarke: exemple

Signaux symétriques triphasés:

$$x_a(t) = A \cos(\phi(t))$$

$$x_b(t) = A \cos(\phi(t) - 120)$$

$$x_c(t) = A \cos(\phi(t) + 120)$$

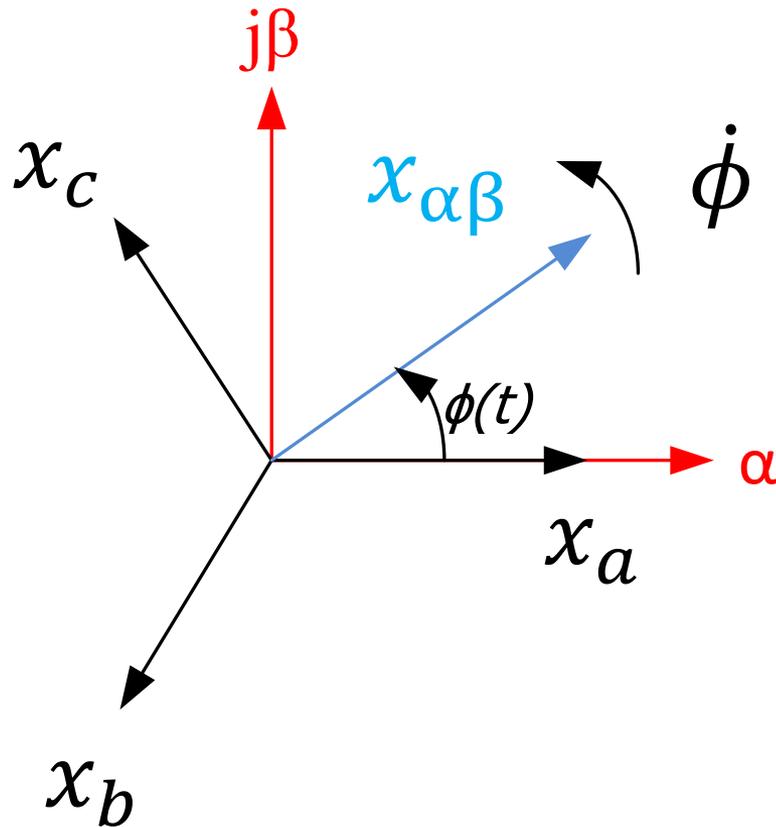
Donc:

$$x_\alpha(t) = A \cos(\phi(t))$$

$$x_\beta(t) = A \sin(\phi(t))$$

$$x_{\alpha\beta}(t) = Ae^{j\phi(t)}$$

La transformation de Clarke



Remarque: Ici la séquence zéro est $zéro_{,x_0} = 0$.

La transformation inverse de Clarke

La transformation inverse est donnée par:

$$x_{abc} = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = T_{\alpha\beta 0}^{-1} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix}$$

Où la transformation inverse est:

$$T_{\alpha\beta 0}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

La transformation de Clarke: séquence négative

Trois négatif-séquence:

$$x_a(t) = A \cos(\phi(t))$$

$$x_b(t) = A \cos(\phi(t) + 120)$$

$$x_c(t) = A \cos(\phi(t) - 120)$$

Donc:

$$x_\alpha(t) = A \cos(\phi(t))$$

$$x_\beta(t) = -A \sin(\phi(t))$$

$$x_{\alpha\beta}(t) = A e^{-j\phi(t)}$$

Clarke's Transformation: Harmonics

Signal triphasé avec des harmoniques:

$$x_a(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_n \cos(n\omega t)$$

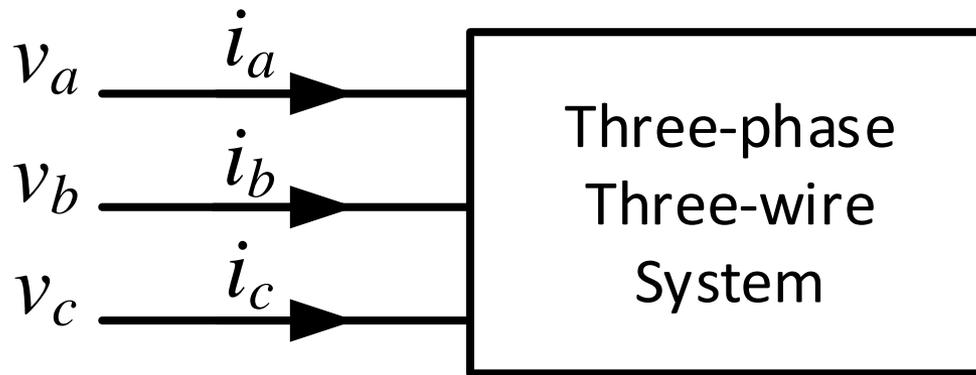
$$x_b(t) = A_1 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + A_n \cos\left(n\omega t - \frac{2n\pi}{3}\right)$$

$$x_c(t) = A_1 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + A_n \cos\left(n\omega t + \frac{2n\pi}{3}\right)$$

Donc (common on peut demontrer?):

$$x_{\alpha\beta}(t) = A_1 e^{-j\omega t} + \frac{A_n}{3} \left[1 + e^{-j(n-1)\frac{2\pi}{3}} + e^{-j(n-1)\frac{4\pi}{3}} \right] e^{jn\omega t} \\ + \frac{A_n}{3} \left[1 + e^{j(n+1)\frac{2\pi}{3}} + e^{j(n+1)\frac{4\pi}{3}} \right] e^{-jn\omega t}$$

Power in Three-wire Three-phase Systems



$$P(t) = v_{abc}^T \cdot i_{abc} = [T_{\alpha\beta 0}^{-1} v_{\alpha\beta 0}]^T \cdot [T_{\alpha\beta 0}^{-1} i_{\alpha\beta 0}] = [v_\alpha \ v_\beta \ v_0] (T_{\alpha\beta 0}^{-1})^T (T_{\alpha\beta 0})^{-1} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{bmatrix}$$

$$(T_{\alpha\beta 0}^{-1})^T (T_{\alpha\beta 0})^{-1} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P(t) = \frac{3}{2} (v_\alpha i_\alpha + v_\beta i_\beta) = \frac{3}{2} \text{Re}\{V_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta}^*\}$$

Power in Three-wire Three-phase Systems

Instantaneous real power:

$$P(t) = \frac{3}{2}(v_{\alpha}i_{\alpha} + v_{\beta}i_{\beta}) = \frac{3}{2}\text{Re}\{V_{\alpha\beta}I_{\alpha\beta}^*\}$$

Instantaneous reactive power:

$$Q(t) = \frac{3}{2}\text{Im}\{V_{\alpha\beta}I_{\alpha\beta}^*\}$$

Instantaneous complex power:

$$S(t) = P(t) + jQ(t) = \frac{3}{2}V_{\alpha\beta}I_{\alpha\beta}^*$$

Park's Transformation (Rotating Reference Frame)

abc-dq0 transformation:

$$\begin{bmatrix} x_d(t) \\ x_q(t) \\ x_0(t) \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta - 120) & \cos(\theta + 120) \\ -\sin(\theta) & -\sin(\theta - 120) & -\sin(\theta + 120) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}$$

dq0-abc transformation:

$$\begin{bmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 1 \\ \cos(\theta - 120) & -\sin(\theta - 120) & 1 \\ \cos(\theta + 120) & -\sin(\theta + 120) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d(t) \\ x_q(t) \\ x_0(t) \end{bmatrix}$$

Where: $\theta(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau + \theta_0$

Park's Transformation: Example

A set of three-phase balanced signals:

$$x_a(t) = A \cos(\phi(t))$$

$$x_b(t) = A \cos(\phi(t) - 120)$$

$$x_c(t) = A \cos(\phi(t) + 120)$$

Thus:

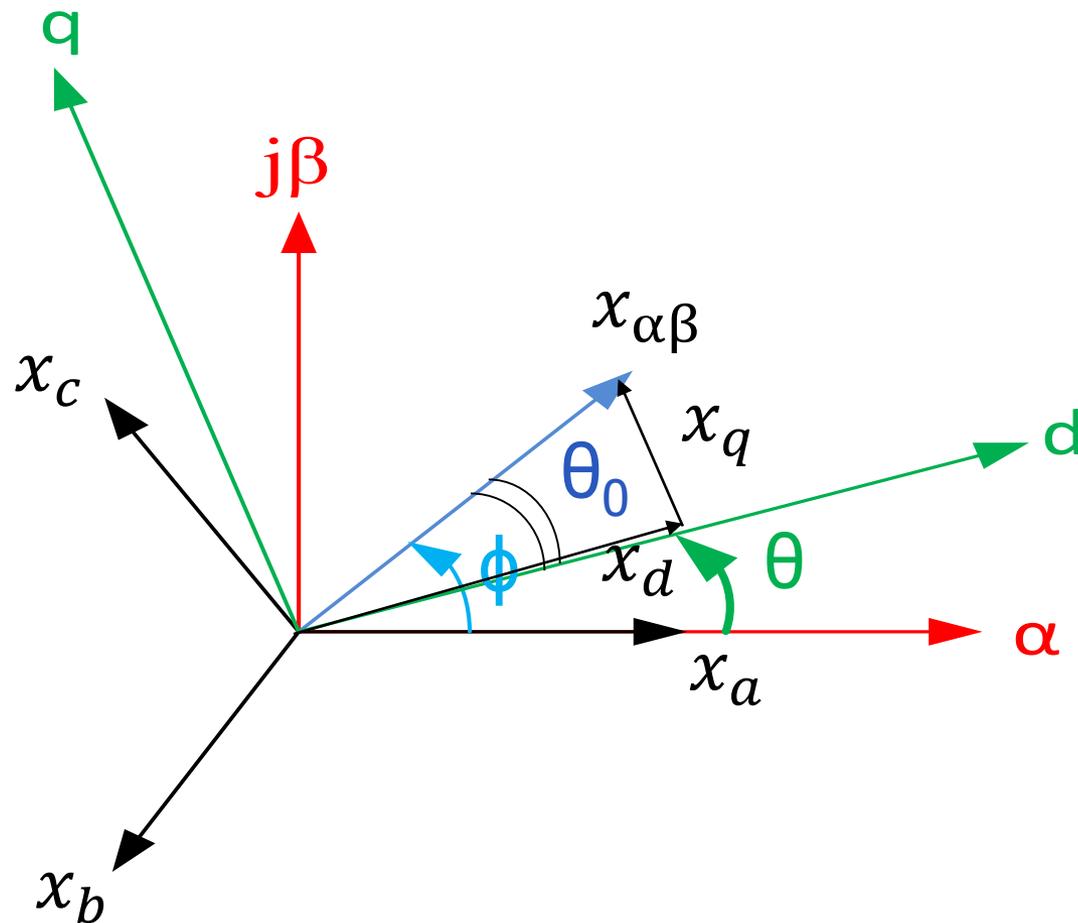
$$x_d(t) = A \cos(\phi(t) - \theta(t))$$

$$x_q(t) = A \sin(\phi(t) - \theta(t))$$

$$x_{dq}(t) = x_d(t) + jx_q(t) = Ae^{j(\phi(t) - \theta(t))} = x_{\alpha\beta}(t)e^{-j\theta(t)}$$

Park's Transformation: Example

If $\phi(t) - \theta(t) = \theta_0$, then: $x_{dq} = Ae^{j\theta_0}$



Power in Three-wire Three-phase Systems

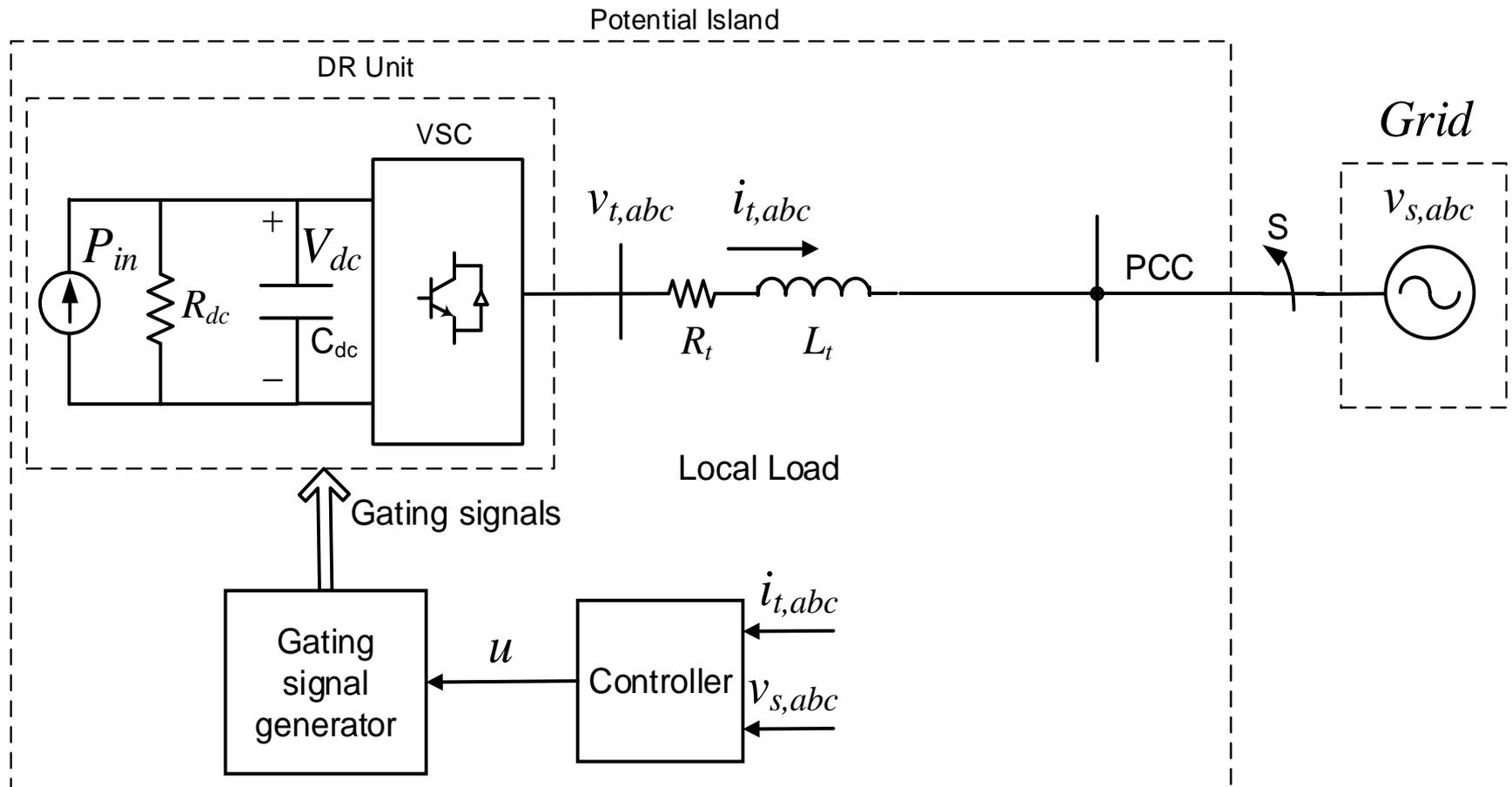
Instantaneous power:

$$S(t) = P(t) + jQ(t) = \frac{3}{2}V_{\alpha\beta}I_{\alpha\beta}^* = \frac{3}{2}V_{dq}e^{j\theta}I_{dq}^*e^{-j\theta} = \frac{3}{2}V_{dq}I_{dq}^*$$

$$P(t) = \frac{3}{2}(v_d i_d + v_q i_q)$$

$$Q(t) = \frac{3}{2}(-v_d i_q + v_q i_d)$$

Modeling in reference frames: Example



Modeling in reference frames: Example

$$v_{t,abc} = R_t i_{t,abc} + L_t \frac{di_{t,abc}}{dt} + v_{s,abc}$$

$$P_{in}(t) - \frac{V_{dc}^2}{R_{dc}} - \frac{d(\frac{1}{2}C_{dc}V_{dc}^2)}{dt} = R_t(i_{ta}^2 + i_{tb}^2 + i_{tc}^2) + \frac{d(\frac{1}{2}L_t(i_{ta}^2 + i_{tb}^2 + i_{tc}^2))}{dt} + (v_{sa}i_{ta} + v_{sb}i_{tb} + v_{sc}i_{tc})$$

$$i_{ta}^2 + i_{tb}^2 + i_{tc}^2 = [i_{t\alpha} \ i_{t\beta} \ i_{t0}] (T_{\alpha\beta 0}^{-1})^T (T_{\alpha\beta 0}^{-1}) [i_{t\alpha} \ i_{t\beta} \ i_{t0}]^T$$

$$i_{ta}^2 + i_{tb}^2 + i_{tc}^2 = [i_{td} \ i_{tq} \ i_{t0}] (T_{dq0}^{-1})^T (T_{dq0}^{-1}) [i_{td} \ i_{tq} \ i_{t0}]^T$$

$$(T_{\alpha\beta 0}^{-1})^T (T_{\alpha\beta 0}^{-1}) = (T_{dq0}^{-1})^T (T_{dq0}^{-1}) = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Modeling in reference frames: Example

Model in $\alpha\beta$ – *frame*

$$v_{t,\alpha\beta} = R_t i_{t,\alpha\beta} + L_t \frac{di_{t,\alpha\beta}}{dt} + v_{s,\alpha\beta}$$

$$P_{in}(t) - \frac{V_{dc}^2}{R_{dc}} - \frac{1}{2} C_{dc} \frac{d(V_{dc}^2)}{dt} = \frac{3}{2} R_t (i_{t\alpha}^2 + i_{t\beta}^2) +$$

$$\frac{3}{4} L_t \frac{d(i_{t\alpha}^2 + i_{t\beta}^2)}{dt} + \frac{3}{2} (v_{s\alpha} i_{t\alpha} + v_{s\beta} i_{t\beta})$$

Modeling in reference frames: Example

Model in dq – frame

$$v_{t,dq} = R_t i_{t,dq} + L_t \left(\frac{di_{t,dq}}{dt} + j\omega i_{t,dq} \right) + v_{s,dq}$$

$$P_{in}(t) - \frac{V_{dc}^2}{R_{dc}} - \frac{1}{2} C_{dc} \frac{d(V_{dc}^2)}{dt} = \frac{3}{2} R_t (i_{td}^2 + i_{tq}^2) +$$

$$\frac{3}{4} L_t \frac{d(i_{td}^2 + i_{tq}^2)}{dt} + \frac{3}{2} (v_{sd} i_{td} + v_{sq} i_{tq})$$

What are the inputs-outputs? State-vector?
Disturbances? Control system structure?