SECTION 8.7

SOLUTION DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

Dans cette section, on donnera la solution de l'équation de la chaleur avec

1. des conditions aux limites homogènes.
2. des conditions aux limites non homogènes.

1. Équation de la chaleur avec C.L homogènes

L'équation de la chaleur avec des conditions aux limites **homogènes** est

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad \text{pour } 0 \leq x \leq L, \quad t > 0, \tag{1a}$$

$$u(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad u(L,t) = 0, \quad \text{pour } t > 0, \tag{1b}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad \text{pour } 0 \leq x \leq L. \tag{1c}$$

Étape 1 : Séparation des variables : en posant $u(x,t) = F(x)G(t)$, alors $G(t)$ vérifie l'équation du premier ordre

$$G'(t) - \alpha^2 \lambda G(t) = 0,$$

et $F(x)$ satisfait au problème avec **conditions aux limites homogènes**

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0, \; F(0) = 0 \text{ et } F(L) = 0.$$

Étape 2 : Calcul des valeurs et fonctions propres : la résolution du problème avec conditions aux limites en $F(x)$ donne les **valeurs et fonctions propres**

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad F_n(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \; n = 1,2,\cdots.$$

Équation de la chaleur avec C.L homogènes (suite)

Étape 3 : Calcul des solutions de l'EDO en $G(t)$

$$G_n'(t) + \left(\alpha \frac{n\pi}{L}\right)^2 G_n(t) = 0 \Rightarrow G_n(t) = d_n e^{-(\frac{\alpha n\pi}{L})^2 t}, \ n = 1,2,\ldots.$$

Étape 4 : Principe de superposition : on cherche la solution de (1) sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n F_n(x) G_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-(\frac{\alpha n\pi}{L})^2 t} \sin(\frac{n\pi x}{L}).$$

Étape 5 : Calcul des coefficients D_n de sorte que la condition initiale (1c) soit satisfaite

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(\frac{n\pi x}{L}) = f(x) \Rightarrow D_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx, n = 1,2,\ldots$$

La solution de l'équation de la chaleur avec conditions aux limites homogènes est

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx\right) e^{-(\frac{\alpha n\pi}{L})^2 t} \sin(\frac{n\pi x}{L})$$

2. Équation de la chaleur avec C.L non homogènes

L'équation de la chaleur avec des conditions aux limites **non homogènes** est

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, & \text{pour } 0 \leq x \leq L, \quad t > 0, \\ u(0,t) = T_1 \text{ et } u(L,t) = T_2, & \text{pour } t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & \text{pour } 0 \leq x \leq L, \end{cases} \tag{2}$$

la solution du problème (2) est

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-(\frac{\alpha n\pi}{L})^2 t} \sin(\frac{n\pi x}{L}) + (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1,$$

$$\text{avec } D_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left[f(x) - (T_2 - T_1)\frac{x}{L} - T_1\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

1. où $u_{perm.}(x,t) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1$ est la solution **stationnaire (ou stable ou permanente)** qui vérifie le problème $v_{xx} = 0, v(0) = T_1, v(L) = T_2$ et
2. $u_{trans.}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-(\frac{\alpha n\pi}{L})^2 t} \sin(\frac{n\pi x}{L})$ est la **solution transitoire** qui vérifie l'équation de la chaleur avec des **conditions aux limites homogènes** (1) et la **condition initiale** $u(x,0) = f(x) - (T_2 - T_1)\frac{x}{L} - T_1$

EXEMPLE 1 :

On considère le problème suivant :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \ \text{ pour } 0 < x < 30 \text{ et } t \geq 0, \\
&\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = 0 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x}(30,t) = 0, \ \text{ pour } t > 0, \\
&v(x,0) = 25[u_5(x) - u_{10}(x)] \ \text{ pour } 0 \leq x \leq 30,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

où $u_a(x) = u(x-a)$ est la fonction unité échelon (ou la fonction de Heaviside) au point a.

(a) On pose $v(x,t) = F(x)G(t)$. En utilisant la méthode de séparation des variables, montrer que la fonction $F(x)$ satisfait au problème de fonctions propres

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0, \quad F'(0) = 0 \text{ et } F'(30) = 0 \tag{4}$$

et la fonction $G(t)$ satisfait à l'équation différentielle $G'(t) - \lambda G(t) = 0$, où λ est une constante réelle de séparation.

(b) Résoudre le problème de fonctions propres (4).
On demande une solution complète où chaque étape est justifiée.

(c) En vous servant des résultats obtenus en (a) et (b), trouver la solution du problème (3).

Exemple 2 :

On considère le problème suivant :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \beta^2 c(x,t), \text{ pour } 0 < x < a \text{ et } t \geq 0, \tag{5a}$$

$$c(0,t) = 0 \text{ et } c(a,t) = 0, \text{ pour } t > 0, \tag{5b}$$

$$c(x,0) = c_0 \text{ pour } 0 \leq x \leq a, \tag{5c}$$

où α, β, a et c_0 sont des constantes. Ce problème décrit la diffusion en régime transitoire de la concentration $c(x,t)$ d'une certaine substance dans un milieu donné. La concentration initiale de la substance est donnée par $c(x,0) = c_0$

(a) Soit $c(x,t) = F(x)G(t)$. En utilisant la méthode de séparation des variables, montrer que la fonction $F(x)$ satisfait l'équation différentielle $\alpha^2 F''(x) - (\lambda + \beta^2)F(x) = 0$, et la fonction $G(t)$ satisfait l'équation différentielle $G'(t) - \lambda G(t) = 0$, où λ est une constante de séparation.

(b) Déterminer les conditions limites associées à l'équation différentielle satisfaite par $F(x)$ et résoudre le problème de fonctions et valeurs propres associé à la fonction $F(x)$.

(c) En vous servant des résultats obtenus en (a) et (b), trouver la solution du problème (5). **On demande une solution complète où chaque étape est justifiée.**

Exemple 3 :

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\partial p}{\partial t}, & \text{pour} \quad 0 < x < 1 \text{ et } t > 0; \\ p(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad p(1,t) = 0 & \text{pour} \quad t > 0 \\ p(x,0) = 1 \quad \text{pour} \quad 0 < x < 1. \end{cases} \tag{6}$$

(a) Soit $p(x,t) = F(x)G(t)$, en utilisant la méthode de séparation des variables, montrer que la fonction $F(x)$ satisfait au problème de fonctions propres $F''(x) - 2F'(x) - 2\lambda F(x) = 0$, $F(0) = 0$ et $F(1) = 0$, et la fonction $G(t)$ satisfait à l'équation différentielle $G'(t) - \lambda G(t) = 0$, où λ est une constante de séparation.

(b) Vérifier que les solutions du problème de fonctions propres en F sont données par $F_n(x) = c_n e^x \sin(n\pi x)$ et $\lambda_n = -\left(\dfrac{n^2\pi^2+1}{2}\right)$, où les c_n sont des constantes réelles pour $n = 1,2,3,\ldots$.

(c) En vous servant des résultats obtenus en (a) et (b), trouver la solution du problème (6).

Indice : $1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^x \sin(n\pi x)$, où $b_n = \dfrac{2n\pi[(-1)^{n+1}e^{-1}+1]}{n^2\pi^2+1}, n \geq 1$.

SECTION 8.8

L'Équation de Laplace

Dans cette section, nous étudierons

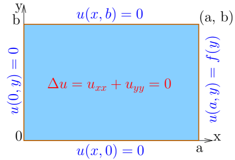
1. Le problème de Dirichlet homogène sur 3 cotés.
2. Les conditions aux limites de Dirichlet générales.
3. Le problème de Neumann.

1. Le problème de Dirichlet homogène sur 3 cotés

1. L'équation de la chaleur en dimension deux s'écrit $u_t = \alpha^2(u_{xx} + u_{yy})$
2. À l'état **stationnaire,** $u_t = 0$, on obtient l'équation de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

3. Le problème de **Dirichlet sur un rectangle** avec des **conditions homogènes sur trois cotés** est



$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \text{pour } 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b, \tag{7a}$$

$$u(x,0) = 0 \text{ et } u(x,b) = 0, \text{ pour } 0 < x < a, \tag{7b}$$

$$u(0,y) = 0, \text{ pour } 0 \le y \le b, \tag{7c}$$

$$u(a,y) = f(y), \text{ pour } 0 \le y \le b. \tag{7d}$$

La solution du problème de Dirichlet homogène

Étape 1 : Séparation des variables : en posant $u(x,y) = F(x)G(y)$, alors $G(y)$ vérifie le problème avec conditions aux limites homogènes

$$G''(y) + \lambda G(y) = 0, \quad G(0) = 0 \text{ et } G(b) = 0,$$

et $F(x)$ vérifie l'équation différentielle ordinaire

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0, \quad F(0) = 0$$

Étape 2 : Calcul des valeurs et fonctions propres : la résolution du problème avec conditions aux limites en $G(y)$ donne les **valeurs et fonctions propres**

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \, G_n(y) = c_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad n \geq 1.$$

Étape 3 : Calcul des solutions de l'EDO en $F(x)$

$$F''(x) - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 F(x) = 0, \, F(0) = 0 \Rightarrow F_n(x) = d_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right), \, n \geq 1.$$

La solution du problème de Dirichlet homogène (suite)

Étape 4 : Principe de superposition : on cherche la solution de (7) sous la forme

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n F_n(x) G_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Étape 5 : Calcul de C_n et D_n pour que la condition aux limites (7d) soit satisfaite

$$u(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = f(y) \Rightarrow$$

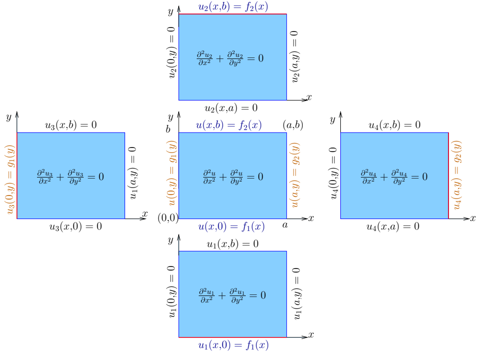
$$D_n = \frac{2}{b \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \int_0^b f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy, \; n = 1,2,\ldots.$$

La solution du problème de Dirichlet est alors

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{b \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \int_0^b f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy \right] \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

2. Les conditions aux limites de Dirichlet générales

La solution du problème de Dirichlet $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$, $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ avec les conditions aux limites générales

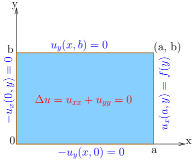


$$u(x,0) = f_1(x), \quad u(x,b) = f_2(x),\ 0 < x < a,$$
$$u(0,y) = g_1(y), \quad u(a,y) = g_2(y),\ 0 \leq y \leq b.$$

est **par superposition**, $u(x,y) = \sum_{i=1}^{4} u_i(x,y)$ où u_i, $i = 1,2,3,4$, résout un problème de Dirichlet avec **conditions aux limites homogènes** sur 3 côtés.

3. Le problème de Neumann

Les conditions de Neumann consistent à imposer des conditions sur la **dérivée normale** $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \partial_{\vec{n}} u = \nabla u \cdot \vec{n}$ aux frontières du domaine.



1. Pour un rectangle, ces conditions sont

$$\partial_{\vec{n}} u(0,y) = \nabla u \cdot \vec{n}(0,y) = -u_x(0,y), 0 < y < b,$$
$$\partial_{\vec{n}} u(a,y) = \nabla u \cdot \vec{n}(a,y) = u_x(a,y), 0 < y < b,$$
$$\partial_{\vec{n}} u(x,0) = \nabla u \cdot \vec{n}(x,0) = -u_y(x,0), 0 < x < a,$$
$$\partial_{\vec{n}} u(x,b) = \nabla u \cdot \vec{n}(x,b) = u_y(x,b), 0 < x < a.$$

2. Le problème de **Neumann sur un rectangle** avec des **conditions homogènes sur trois des cotés** est

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \text{pour } 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b, \tag{8a}$$
$$u_y(x,0) = 0 \text{ et } u_y(x,b) = 0, \text{ pour } 0 < x < a, \tag{8b}$$
$$u_x(0,y) = 0, \quad \text{pour } 0 \leq y \leq b, \tag{8c}$$
$$u_x(a,y) = f(y), \quad \text{pour } 0 \leq y \leq b. \tag{8d}$$

Problème de Neumann sur un rectangle

Étape 1 : Séparation des variables : en posant $u(x,y) = F(x)G(y)$, alors $G(y)$ vérifie le problème avec conditions aux limites homogènes

$$G''(y) + \lambda G(y) = 0, \quad G'(0) = 0 \text{ et } G'(b) = 0,$$

et $F(x)$ vérifie l'équation différentielle ordinaire

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0, \quad F'(0) = 0$$

Étape 2 : Calcul des valeurs et fonctions propres : la résolution du problème avec conditions aux limites en $G(y)$ donne les **valeurs et fonctions propres**

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad G_n(y) = c_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad n = 0,1,2 \ldots.$$

Étape 3 : Calcul des solutions de l'EDO en $F(x)$

$$F''(x) - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 F(x) = 0, \; F'(0) = 0 \Rightarrow F_n(x) = d_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right), n = 0,1,\ldots.$$

La solution du problème de Neumann sur un rectangle (suite)

Étape 4 : Principe de superposition : on cherche la solution de (8) sous la forme

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n F_n(x) G_n(y) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Étape 5 : Calcul des coefficients D_n pour que la condition initiale (8d) soit satisfaite

$$u_x(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n\pi}{b} \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = f(y) \Rightarrow$$

$$D_n = \frac{2}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \int_0^b f(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy, \; n = 1,2, \ldots .$$

La solution du problème de Neumann est donc

$$u(x,y) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \int_0^b f(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy \right] \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Exemple 4 :

La distribution de la température $u(x,y)$ dans une plaque carrée d'un matériau composite est donnée par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \text{pour } 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi. \tag{9}$$

La distribution de température satisfait aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,\pi) = f(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,y) = 0 \quad \text{et} \quad u(\pi,y) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq y \leq \pi, \end{cases}$$

où $f(x)$ est une fonction donnée.

(a) Soit $u(x,y) = F(x)G(y)$, en utilisant la méthode de séparation des variables, montrer que la fonction $F(x)$ satisfait au problème de fonctions propres $F''(x) - \lambda F(x) = 0, \quad F(0) = 0$ et $F(\pi) = 0$, la fonction $G(y)$ satisfait à l'équation différentielle $G''(y) + 2G'(y) + \lambda G(y) = 0$, et à la condition limite homogène $G(0) = 0$, où λ est une constante réelle.

(b) Vérifier que les solutions du problème de fonctions propres en F sont données par $F_n(x) = C_n \sin(nx)$ et $\lambda_n = -n^2$, où les C_n sont des constantes réelles pour $n = 1,2,3, \ldots ..$

(c) En vous servant des résultats obtenus en (a) et (b), trouver la distribution de la température $u(x,y)$.

On demande une solution complète où chaque étape est justifiée.

EXEMPLE 5 :

Soit $u(x,y)$, la la solution de l'équation de Laplace dans la plaque rectangulaire $0 < x < 2, 0 < y < 3$ qui satisfait aux conditions aux limites d

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(2,y) = 0, & \text{si} \quad 0 < y < 3; \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,3) = f(x) = 2 - x & \text{si} \quad 0 < x < 2. \end{cases} \tag{10}$$

(a) Soit $u(x,y) = F(x)G(y)$.
En utilisant la méthode de séparation des variables, montrer que la fonction $F(x)$ satisfait au problème de fonctions propres

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0, \quad F'(0) = 0 \text{ et } F'(2) = 0, \tag{11}$$

et que $G''(y) + \lambda G(y) = 0, \quad G(0) = 0$, où λ est une constante réelle.

(b) En vous servant des résultats obtenus en (a), trouver $u(x,y)$, la solution de l'équation de Laplace qui satisfait aux conditions aux limites (11).

Note : Les solutions au problème de fonctions propres (11) sont données par

$$F_n(x) = c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \text{ et } \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2,$$

où c_n sont des constantes réelles pour $n = 0,1,2,3,\ldots$.