SECTION 8.3

Les séries de Fourier

Dans cette section, nous étudierons les notions suivantes

1. Fonctions périodiques et orthogonalité.
2. Les coefficients d'Euler-Fourier.

1. Fonctions périodiques et orthogonalité

Définition 1 : Notion de périodicité

La fonction f est **périodique de période** $p > 0$, si pour tout x tel que $f(x+p)$ est définie, alors $\boxed{f(x+p) = f(x)}$.
La **période fondamentale** est le **plus petit** $p > 0$ pour lequel $f(x+p) = f(x)$.

Quelques propriétés des fonctions périodiques

1. Si f est de période p_1 et g de période p_2, alors, pour tous $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ la fonction $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ est de période $\mathbf{p} = \mathbf{ppcm}(\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2})$: le plus petit commun multiple (positif) de p_1 et p_2.
2. Si f est périodique de période p alors $f(x \pm np) = f(x)$, pour tout **nombre entier** n.
3. Les fonctions $\cos(mx)$ et $\sin(mx)$ sont de période $p = \dfrac{2\pi}{m}$.
4. Comme $\cos(x \pm \pi) = -\cos(x)$ et $\sin(x \pm \pi) = -\sin(x)$, alors les fonctions $\cos(mx)\sin(mx), \dfrac{\cos(mx)}{\sin(mx)}, \dfrac{\sin(mx)}{\cos(mx)}, \cos(mx)\cos(mx)$ et $\sin(mx)\sin(mx)$ sont de période $p = \dfrac{\pi}{m}$.
5. Les fonctions $\cos(mx)\cos(nx), \dfrac{\cos(mx)}{\sin(nx)}, \dfrac{\sin(nx)}{\cos(mx)}, \sin(mx)\cos(nx)$ et $\sin(mx)\sin(nx)$ sont de période $p = \text{ppcm}\left\{\dfrac{2\pi}{m}, \dfrac{2\pi}{n}\right\}$, lorsque $n \neq m$.

DÉFINITION 2 : Produit scalaire de fonctions à valeurs réelles

Le **produit scalaire** des fonctions à valeurs réelles f et g, défini sur l'intervalle $[a,b]$ est

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

DÉFINITION 3 : Fonctions orthogonales dans un intervalle $[a,b]$

Les fonctions f et g sont **orthogonales** dans $[a,b]$ si leur produit scalaire est nul :

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

DÉFINITION 4 : Ensemble de fonctions orthogonales

Un ensemble de fonctions à valeurs réelles $\{\phi_0(x),\phi_1(x),\ldots,\phi_n(x),\ldots\}$ est **mutuellement orthogonal** si les fonctions de l'ensemble sont orthogonales deux à deux :

$$(\phi_m,\phi_n) = \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0, m \neq n.$$

Formules de linéarisation trigonométriques

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2},\quad \cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a-b)+\sin(a+b)}{2}.$$

Orthogonalité des fonctions $\left\{\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right\}$

Les fonctions périodiques de période $\frac{2L}{m}$, $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, $m = 1,2,\ldots$ ayant la **période commune** $2L$ sont **orthogonales** sur $[-L,L]$. En effet

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} L, & \text{si} \quad n = m, \\ 0, & \text{si} \quad n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} L, & \text{si} \quad n = m, \\ 0, & \text{si} \quad n \neq m \end{cases} \quad \text{et}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0, \text{ pour tout } m \text{ et } n.$$

2. Les coefficients d'Euler-Fourier

Définition 5 : Les coefficients d'Euler-Fourier

Les **coefficients d'Euler-Fourier** de la fonction **périodique** de période $p = 2L$, f sont

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_c^{c+p} f(x)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \text{ pour } c \in \mathbb{R}$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_c^{c+p} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{p}\right)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \; n = 1,2,\ldots,$$

$$b_n = \frac{2}{p}\int_c^{c+p} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{p}\right)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \; n = 1,2,\ldots.$$

Définition 6 : La série de Fourier

La **série de Fourier** d'une fonction f est

$$S_F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right].$$

où les a_n et b_n sont les coefficients d'Euler-Fourier de f

SECTION 8.4

Le théorème de convergence de Fourier

Dans cette section, nous énonçons le

1. Théorème de convergence des séries de Fourier.

1. Théorème de convergence des séries de Fourier

Théorème 1 : (# 8.4.1) : convergence des séries de Fourier)

Supposons que $f(x)$ et $f'(x)$ sont **continues par morceaux** dans l'intervalle $[-L,L[$. Si $f(x)$ est définie à l'extérieur de l'intervalle $[-L,L[$ et si $f(x)$ **est périodique de période** $2L$, alors $f(x)$ admet un développement en série de Fourier de la forme

$$S_F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right],$$

où a_n et b_n sont les coefficients d'Euler-Fourier de f.

De plus la **série de Fourier de** f**, converge** vers

1. $S_F(x) = f(x)$ si f est **continue** en x;
2. $S_F(x) = \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ si f est **discontinue** en x, où
   $f(x^+) = \lim\limits_{h\to 0,\ h>0} f(x+h)$ et $f(x^-) = \lim\limits_{h\to 0,\ h<0} f(x-h)$.

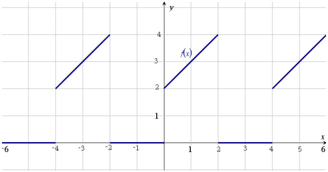
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) = \begin{cases} f(x_0) & \text{si } f \text{ est continue en } x_0; \\ \dfrac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} & \text{si } f \text{ est discontinue en } x_0. \end{cases}$$

Exemple 1 :

Déterminer la plus petite période de la fonction
$f(x) = \pi + 2\sin\left(\frac{2x}{5}\right)\sin\left(\frac{x}{3}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$. **Justifier votre réponse**

Exemple 2 :

Soit la fonction périodique de période $P = 4$ définie par le graphe ci-dessous, qu'on voit ici sur l'intervalle $-6 < x < 6$:



a) Calculer $S_F(x)$, la série de Fourier de la fonction $f(x)$.

b) Sachant que $S_F(2020) = \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$, déterminer la valeur vers laquelle cette série converge. **Justifier votre réponse**.

SECTION 8.5

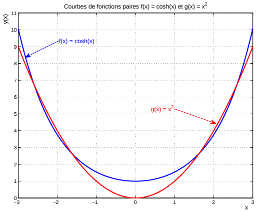
LES FONCTIONS PAIRES ET IMPAIRES

Dans cette section, nous aborderons les thèmes suivants

1. Fonctions paires et fonctions impaires.
2. Séries de Fourier de fonctions paires et de fonctions impaires.
3. Prolongement pair et prolongement impair.

1. Les fonctions paires et les fonctions impaires

Définition 1 : fonction paire



Une fonction f est **paire** si $f(-x) = f(x)$.

1. Le graphe de f est **symétrique par rapport à l'axe 0y**.
2. Dans ce cas $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx, \forall a$.
3. Les coefficients d'Euler-Fourier de f sont

$$b_n = 0,\ n = 1{,}2,\ldots \text{ et}$$

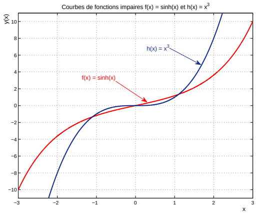
$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x)dx,\ n \geq 0.$$

La série de Fourier d'une fonction paire

La série de Fourier d'une fonction **paire** f est

$$S_F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Définition 2 : fonction impaire



Une fonction f est **impaire** si $f(-x) = -f(x)$.

1. Le graphe de f est **symétrique par rapport à l'origine** 0.
2. Dans ce cas $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0, \forall a.$
3. Les coefficients d'Euler-Fourier de f sont

$$a_n = 0,\ n = 0,1,2,\ldots \text{ et}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x)dx,\ n \geq 1.$$

La série de Fourier d'une fonction impaire

La **série de Fourier** d'une fonction **impaire** f est $S_F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

Exemple 3 :

Soit $f(x) = -x, -3 < x < 0$. Déterminer si la fonction $f(x)$ est paire, impaire, ou ni l'un ni l'autre. **Justifier votre réponse**.

Propriétés des fonctions paires et impaires

f	g	$f \pm g$	$f \times g$	$\frac{f}{g}$ (ou $\frac{g}{f}$)
paire	**paire**	**paire**	**paire**	**paire**
paire	**impaire**	*	impaire	impaire
impaire	**paire**	*	impaire	impaire
impaire	**impaire**	**impaire**	paire	paire

Quelques égalités trigonométriques utiles

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, \text{ si } n = 2k, \\ (-1)^k, \text{ si } n = 2k+1, \end{cases} \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k, \text{ si } n = 2k, \\ 0, \text{ si } n = 2k+1. \end{cases}$$

et

$$\cos(n\pi) = (-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 2k, \\ -1, & \text{si } n = 2k+1; \end{cases} \quad \text{et} \quad \sin(n\pi) = 0,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

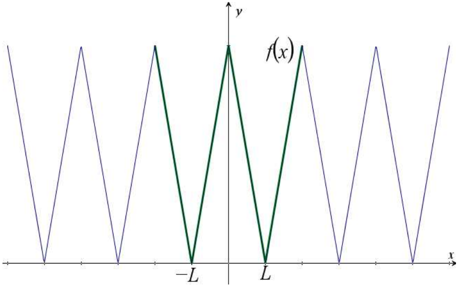
Exemple 4 :

On considère la fonction définie par : $f(x) = 1 + x$ pour $-1 < x < 0$, $f(-1) = f(0) = 0{,}5$ et $f(x+1) = f(x)$. Calculer $f(13{,}25)$. **Justifier votre réponse**.

2. Prolongements périodiques pair ou impair

Définition 3 : Le prolongement périodique pair

Soit f une fonction définie sur $[0,L]$.



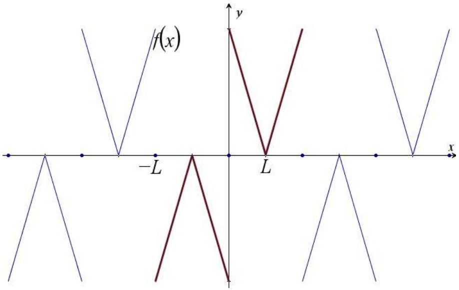
Le **prolongement périodique pair** de f, de période $2L$, est la fonction

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si} \quad 0 \leq x \leq L, \\ f(-x), & \text{si} \quad -L < x < 0, \end{cases} \quad \text{et } f(x+2L) = f(x).$$

Le graphe du prolongement pair de $f(x)$ est déduit du graphe de $f(x)$ par réflexion par rapport à l'axe des y.

DÉFINITION 4 : Le prolongement périodique impair

Soit f une fonction définie sur $[0,L]$.



Le **prolongement périodique impair** de f, de période $2L$, est la fonction définie par

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si} \quad 0 < x < L, \\ 0, & \text{si} \quad x = 0,\, L, \\ -f(-x), & \text{si} \quad -L < x < 0, \end{cases} \qquad \text{et } f(x+2L) = f(x).$$

Le graphe du prolongement impair de $f(x)$ est déduit du graphe de $f(x)$ par une symétrie par rapport à l'origine ou une double réflexions par rapport aux axes des x et des y.

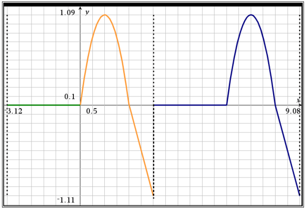
Série de Fourier d'une fonction quelconque

Pour déterminer la **série de Fourier** d'une fonction f définie sur $[0,L]$ (éventuellement non périodique), on peut utiliser

1. un **prolongement pair** et de période $2L$ pour obtenir une série de cosinus. Cette série de cosinus de Fourier représente f sur $[0,L]$;
2. un **prolongement impair** $2L$-**périodique** pour obtenir une série de sinus qui représente f sur [0, L];
3. un **prolongement** périodique ordinaire, par exemple

$$k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } 0 \leq x \leq L, \\ 0, & \text{si } -L < x < 0, \end{cases} \quad \text{et } k(x+2L) = k(x)$$

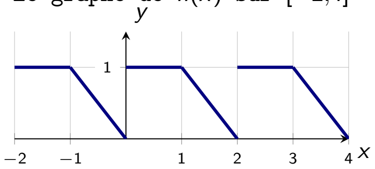
pour obtenir une série de cosinus et de sinus. La série de Fourier ainsi obtenue représente f sur $[0,L]$ pour tout prolongement de f sur $(-L,0)$.



EXEMPLE 5 :

Soit $h(x)$, la fonction périodique de période $p = 2$, illustrée à la figure ci-dessous

Le graphe de $h(x)$ sur $[-2,4]$



(a) Déterminez l'expression analytique de $h(x)$ et en déduire la série de Fourier de $h(x)$.

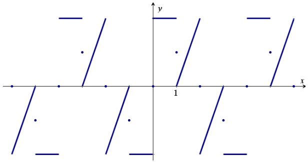
(b) On définit par prolongement la fonction impaire périodique de période $p = 4$ qui coïncide avec la fonction $h(x)$ sur l'intervalle $[0,2]$.
Tracer sur l'intervalle $[-6,6]$ le graphe de la fonction vers laquelle la série de Fourier du prolongement impair de la fonction $h(x)$ converge.

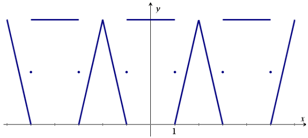
(c) On définit par prolongement la fonction paire périodique de période $p = 4$ qui coïncide avec la fonction $h(x)$ sur l'intervalle $[0,2]$.
Tracer sur l'intervalle $[-6,6]$ le graphe de la fonction vers laquelle la série de Fourier du prolongement pair de la fonction $h(x)$ converge.

Exemple 6 :

Soit la fonction $h(x)$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad 0 \leq x < 1 \\ -1 + x & \text{pour} \quad 1 \leq x < 2. \end{cases}$$





(a) On définit par prolongement la fonction impaire périodique de période $p = 4$ qui coïncide avec la fonction $h(x)$ sur l'intervalle $[0,2]$.
Tracer sur l'intervalle $[-6,6]$ le graphe de la fonction vers laquelle la série de Fourier du prolongement impair de la fonction $h(x)$ converge.

(b) On définit par prolongement la fonction paire périodique de période $p = 4$ qui coïncide avec la fonction $h(x)$ sur l'intervalle $[0,2]$.
Tracer sur l'intervalle $[-6,6]$ le graphe de la fonction vers laquelle la série de Fourier du prolongement pair de la fonction $h(x)$ converge.

EXEMPLE 7 :

On considère une fonction impaire et périodique de période $p = 2$ définie par :

$$h(x) = 1 + e^{-x} \text{ pour } 0 < x < 1.$$

Calculer $h(1{,}5)$. **Justifier votre réponse**.

EXEMPLE 8 :

On désire déterminer les coefficients K_n pour $n = 0{,}1{,}2, \ldots$ de sorte que

$$K_0 e^x + \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^x \cos(n\pi x) = 1 \text{ pour } 0 < x < 1.$$

Donner l'équation qui permet de déterminer les coefficients K_n pour $n = 0{,}1{,}2{,}3, \ldots$
On ne demande pas de calculer la valeur des coefficients

EXEMPLE 9 :

On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = xte^{-t} \quad \text{pour} \quad 0 < x < \pi \text{ et } t > 0, \\ u(0,t) = 0 \text{ et } u(\pi,t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

On cherche des solutions du problème (1) sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin(nx)$$

où les $A_n(t)$ sont des fonctions à déterminer.
Pour $n \geq 1$, montrer que la fonction $A_n(t)$ satisfait à l'équation différentielle

$$A_n'(t) + n^2 A_n(t) = b_n te^{-t}, \text{ où } b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi^2}, \text{ pour } n = 1,2,\dots .$$

Déterminer $A_n(t)$ et en déduire la solution $u(x,t)$ du problème (1).