GCH2535 : MODÉLISATION NUMÉRIQUE EN GÉNIE CHIMIQUE - HIVER 2020- GR. 1

Zoumana Coulibaly

Ph.D. en mathématiques de l'ingénieur (POLY 2012)

Département de Mathématiques et Génie Industriel

École Polytechnique de Montréal

Site moodle du cours

Notes de Cours

Le 8 janvier 2020

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Horaires et locaux

- Horaires
  - Cours : Mercredi : 15H45 – 17H35 (L−1720).
  - Travaux dirigés : Jeudi : 13H45 – 15H35 (M−2101).
- Courriel : zoumana.coulibaly@polymtl.ca.
- Disponibilités au local A−520.38 (sur rendez-vous)
  - Mercredi :14H00 – 15H30.
  - Jeudi : 15H30 – 17H30.
- Manuels de base utilisés
  - Équations différentielles, R. Boyce et C. Diprima, 2ème édition, modulo, adaptation française de D. N'dri.
  - Équations différentielles, M. Lefebvre, les presses de l'Université de Montréal.
- Évaluations
  - Devoir : à rendre le mercredi 29 janvier 2020 à 23h55.
  - Contrôle périodique 1 : mercredi le 5 février 2020.

CHAPITRE 8

Les EDPs et les séries de Fourier

Objectifs : à la fin de ce chapitre, l'étudiant saura

1. Classifier une équation aux dérivées partielles;
2. Définir et appliquer la séparation des variables;
3. Trouver les valeurs et fonctions propres d'un problème de valeur limite en deux points;
4. Trouver la série de Fourier d'une fonction périodique et trouver sa limite;
5. Définir des prolongements périodiques pairs ou impairs;
6. Résoudre par séparation de variables, l'équation de la chaleur et l'équation de Laplace sur un rectangle.

SECTION 8.1

Généralités sur les équations aux dérivées partielles

Dans cette section, on s'intéressera aux thèmes suivants

1. Généralités et classification des EDPs linéaires.
2. Équation de la chaleur dans une tige unidimensionnelle.
3. La méthode de séparation des variables.

1. Généralités et classification des EDPs linéaires

Soit l'**équation aux dérivées partielles (EDP) linéaire d'ordre deux à coefficients constants** (A,B,C,D,E et F sont des constantes réelles)

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial u^2}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G(x,y). \quad (1)$$

1. Si $G(x,y) = 0$, l'équation (1) est **homogène**, et si $G(x,y) \neq 0$, (1) est **non homogène**.
2. Selon la valeur de $AC - B^2$, on peut classifier l'équation (1) selon les trois types suivants

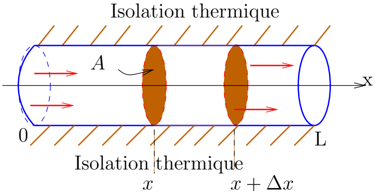
Type de l'équation (1)	Exemples	Noms
Hyperbolique : $AC - B^2 < 0$	$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$	Équation d'onde $AC - B^2 = a^2 \cdot (-1) - 0 = -a^2 < 0$
Parabolique : $AC - B^2 = 0$	$\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$	Équation de la chaleur $AC - B^2 = \alpha^2 \cdot 0 - 0 = 0$
Elliptique : $AC - B^2 > 0$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	Équation de Laplace $AC - B^2 = 1 \cdot 1 - 0 = 1 > 0$

2. Équation de la chaleur dans une tige unidimensionnelle

L'équation de conduction de la chaleur dans une tige unidimensionnelle est donnée par

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

où α est une constante appelée **diffusivité thermale** liée au matériau composant la tige.



Afin d'avoir une solution unique, on doit imposer des **conditions aux limites** et une **condition initiale**.
La **condition initiale** donne la distribution initiale de température dans la tige.
Pour une fonction $f(x)$ donnée, elle se met sous la forme

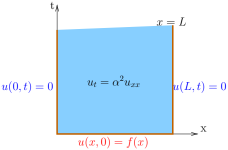
$$u(x,0) = f(x),\ 0 \leq x \leq L.$$

Les conditions aux limites

Les **conditions aux limites** peuvent être

1. **de Dirichlet homogènes** si

$$u(0,t) = 0 = u(L,t),\ t > 0.$$



2. **de Dirichlet non homogènes** si

$$u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2,\ t > 0.$$

Dans le cas des conditions non homogènes, on se ramène au cas **homogène** par le changement de variables

$$w(x,t) = u(x,t) - \left[\frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1\right].$$

3. On a aussi les **conditions aux limites de Neumann :** les deux extrémités sont **isolés**

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u_x(0,t) = 0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = u_x(L,t),\ t > 0.$$

3. La méthode de la séparation des variables

L'équation de la chaleur avec des conditions aux limites homogènes est

$$\begin{cases} \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0, \\ u(0,t) & = 0 = u(L,t), \quad t > 0, \\ u(x,0) & = f(x), \quad 0 \leq x \leq L. \end{cases} \tag{2}$$

1. Pour résoudre le problème (2), on suppose que la méthode de la **séparation des variables** s'applique, c'est-à-dire que $u(x,t)$ peut s'écrire sous la forme

$$u(x,t) = F(x)G(t).$$

2. On en déduit que $F(x)$ satisfait au **problème avec conditions aux frontières homogènes** suivant

$$F''(x) = -\lambda F(x), \quad F(0) = 0 = F(L),$$

où λ est une **constante réelle de séparation** et que

3. $G(t)$ vérifie l'équation du **premier ordre**

$$G'(t) = -\alpha^2 \lambda G(t).$$

EXEMPLE 1 :

On considère l'équation aux dérivées partielles suivante

$$2x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ pour } x > 0 \text{ et } y > 0. \tag{3}$$

(a) Trouver les équations différentielles ordinaires satisfaites par $F(x)$ et $G(y)$ pour que $u(x,y) = F(x)G(y)$ soit solution de l'équation aux dérivées partielles (3).

(b) Trouver toutes les fonctions sous la forme $u(x,y) = F(x)G(y)$ qui satisfont à l'équation aux dérivées partielles (3).

EXEMPLE 2 :

On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0 \text{ pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1. \tag{4}$$

En utilisant la méthode de la séparation des variables, trouver les équations différentielles ordinaires satisfaites par les fonctions $F(x)$ et $G(y)$ pour que $u(x,y) = F(x)G(y)$ soit une solution de l'équation aux dérivées partielles (4).

Rappel : l'équation linéaire d'ordre un

Soit l'équation linéaire du premier ordre sous forme **normalisée (ou standard)**

$$P(t)y'(t) + Q(t)y(t) = R(t) \Leftrightarrow \boxed{1}\, y'(t) + p(t)y(t) = q(t). \qquad (5)$$

- Un facteur intégrant de (5), qui ne dépend que de t, est

$$F(t) = e^{\int p(t)dt}.$$

- En **multipliant (5) par** F, on a

$$F(t)y'(t) + \underbrace{F(t)p(t)}_{F'(t)}y(t) = F(t)q(t) \;\Rightarrow\; [F(t)y(t)]' = F(t)q(t).$$

- La solution de l'équation linéaire (5) est alors

$$y(t) = [F(t)]^{-1}\int F(t)q(t)dt = \frac{\displaystyle\int F(t)q(t)dt + K}{F(t).}$$

Rappel : équations à variables séparables

Une équation est **à variables séparables** si elle s'écrit sous l'une des trois formes équivalentes ci-dessous

$$\frac{dy}{dx} = G(x)H(y) \Leftrightarrow M(x)dx + N(y)dy = 0 \Leftrightarrow M(x) + N(y)y' = 0. \qquad (6)$$

La solution de l'**équation à variables séparables** (6) est

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \ \Leftrightarrow \ \int M(x)dx + \int N(y)dy = K,\ K \text{ constante.}$$

Rappel : solution générale de l'équation homogène.

Équation **homogène** du deuxième ordre $ay'' + by' + cy = 0$		
$P(r) = ar^2 + br + c$ et $\Delta = b^2 - 4ac$		
Signe de Δ	Solutions de $P(r) = 0$	Solution générale
$\Delta > 0$	$r_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
$\Delta < 0$	$r_{1,2} = \dfrac{-b \pm \imath\sqrt{-\Delta}}{2a} = \lambda \pm \imath\mu$	$y(x) = c_1 e^{\frac{-bx}{2a}} \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) + c_2 e^{\frac{-bx}{2a}} \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right)$
$\Delta = 0$	$r = -\dfrac{b}{2a}$	$y(x) = e^{\frac{-bx}{2a}}(c_1 + c_2 x)$

SECTION 8.2

LES PROBLÈMES DE VALEUR LIMITE EN DEUX POINTS.

Dans cette section, on étudiera

1. Les valeurs propres et fonctions propres d'un problème de valeur limite en deux points.

1. Problème avec conditions aux limites et valeurs propres

Un problème avec **conditions aux frontières** est tout problème de la forme

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x), \text{ pour } \alpha \leq x \leq \beta, \tag{7}$$

à laquelle on impose des conditions aux extrémités $x = \alpha$ et $x = \beta$ de la forme

$$\begin{cases} y(\alpha) = y_0 \text{ et } y(\beta) = y_1 \text{ ou bien} \\ \dfrac{dy}{dx}(\alpha) = u_0 \text{ et } \dfrac{dy}{dx}(\beta) = u_1 \text{ ou bien} \\ y(\alpha) + h_1 \dfrac{dy}{dx}(\alpha) = 0 \text{ et } y(\beta) + h_2 \dfrac{dy}{dx}(\beta) = 0, \ldots \end{cases}$$

1. Si $g(x) = 0$ et $y_0 = 0 = y_1$, le problème (7) correspondant

   $$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \text{ pour } \alpha \leq x \leq \beta, \quad y(\alpha) = 0 \text{ et } y(\beta) = 0.$$

   est dit **homogène**. Dans ce cas, la **solution triviale**, $y(x) = 0$, est une solution du problème.
2. Les **fonctions propres** sont les solutions générales **non nulles** de l'ÉDO $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x)$ et qui **vérifient en plus les conditions aux limites**.

Problème avec CL et valeurs propres (suite)

3 Pour résoudre le problème avec conditions aux frontières

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 + \text{ des CL,}$$

on calcule la solution de l'EDO, selon les valeurs de $\Delta = b^2 - 4ac$

Cas 1 : Si $\Delta > 0$, alors $P(r) = ar^2 + br + c = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$.

Cas 2 : Si $\Delta = 0$, alors $P(r) = ar^2 + br + c = 0 \Rightarrow r_{1,2} = r = \dfrac{-b}{2a}$ et

$$y(x) = e^{\frac{-b}{2a}x}(c_1 + c_2 x).$$

Cas 3 : Si $\Delta < 0$, alors $P(r) = ar^2 + br + c = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \dfrac{-b \pm \imath\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et

$$y(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}\left[K_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) + K_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right)\right].$$

Les **fonctions propres** sont les **solutions non nulles** qui vérifie aussi les CL.

4 Par exemple, les **valeurs et fonctions propres** du problème $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$ sont

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \; n = 1,2,\ldots.$$

Équations trigonométriques et hyperboliques

Dans le calcul des valeurs propres, on arrive souvent à des équations hyperboliques ou trigonométriques comme celles ci-dessous

1. $\cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow x = \pm y \pm 2n\pi,\ n = 0,1,2,\ldots (n \in \mathbb{N})$.
   En particulier
   $$\cos(x) = 0 = \cos\left(-\frac{\pi}{2} \pm n\pi\right) \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \pm n\pi, n = 0,1,2,\ldots .$$
2. $\sin(x) = \sin(y) \Leftrightarrow \begin{cases} x & = y \pm 2n\pi, n = 0,1,2,\ldots \text{ ou} \\ x & = \pi - y \pm 2n\pi,\ n = 0,1,2,\ldots . \end{cases}$
   En particulier
   $$\sin(x) = 0 = \sin(\pm n\pi) \Rightarrow x = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$
3. $\tan(x) = \tan(y) \Leftrightarrow x = y \pm n\pi,\ n = 0,1,2,\ldots .$
   Par exemple
   $$\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 0 \Rightarrow \tan(x) = \sqrt{3} = \tan\left(\frac{\pi}{3} \pm n\pi\right) \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \pm n\pi, n \geq 0.$$
4. $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \geq \cosh(0) = 1, \forall x$ et $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

EXEMPLE 3 :

Trouver les fonctions et les valeurs propres réelles du problème

$$\begin{cases} G''(y) + \lambda G(y) = 0 \text{ pour } 0 < y < \frac{\pi}{2} \\ G'(0) = 0 \text{ et } G''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

On demande une solution complète où chaque étape est justifiée

EXEMPLE 4 :

Trouver les fonctions et les valeurs propres réelles du problème

$$\begin{cases} y'' + (1-\lambda)y = 0 \text{ pour } -1 < x < 1 \\ y(-1) - y(1) = 0 \text{ et } y'(-1) - y'(1) = 0. \end{cases}$$

On demande une solution complète où chaque étape est justifiée

EXEMPLE 5 :

Trouver les fonctions et les valeurs propres réelles du problème.

$$\begin{cases} y'' + 6y' + (5+\lambda)y = 0 \text{ pour } 0 < x < 2, \\ y(0) = 0 \text{ et } y(2) = 0, \end{cases}$$