Département de mathématiques et de génie industriel
École Polytechnique de Montréal

MTH1115/D: ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
CONTRÔLE PÉRIODIQUE II

4 novembre 2023

Directives: *Vous avez une heure et trente minutes pour compléter ce contrôle. Les calculatrices sont interdites.* ***Une réponse sans justification se verra attribuer la note 0.***

1. Questions indépendantes

($\frac{3}{20}$) (a) Sachant que $y(t) = t$ est une solution de l'équation différentielle

$$t^2 y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0, \quad \text{pour} \quad t > 0,$$

trouver la solution générale de cette équation différentielle.

($\frac{2}{20}$) (b) Soit l'équation différentielle

$$x^2 y'' + 3xy' + \alpha y = 0 \quad \text{pour} \quad x > 0,$$

où $\alpha < 1$ est un paramètre.
Trouver toutes les valeurs de α pour lesquelles toutes les solutions de cette équation différentielle s'approchent de zéro lorsque $x \to \infty$.

($\frac{2}{20}$) (c) Soit $y_1(t) = e^{2t}$, $y_2(t) = e^{3t}\cos(5t)$ et $y_3(t) = te^{3t}\cos(5t)$ des solutions d'une équation différentielle d'ordre 5 homogène à coefficients constants. Donner la solution générale de l'équation différentielle. **On ne demande pas de trouver l'expression de l'équation différentielle.**

($\frac{1}{20}$) (d) Soit le système d'équations différentielles d'ordre 2 suivant:

$$\begin{cases} y_1''(t) = -5y_1(t) + 2y_2(t) \\ \\ y_2''(t) = -2y_2(t) + 2y_1(t) \end{cases}$$

Transformer ce système d'équations différentielles en une seule équation différentielle d'ordre 4 dont la variable dépendante est $y_2(t)$.

($\frac{6}{20}$) 2. Trouver la solution de l'équation différentielle

$$y'' + y' + y = t^2$$

qui satisfait aux conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$.
Note: vous serez fortement pénalisés pour les erreurs de calcul. Vérifier vos calculs!

3. On considère le système d'équations différentielles non homogène suivant:

$$\begin{cases} y_1'(t) = 3y_1(t) - 2y_2(t) + t; \\ \\ y_2'(t) = 2y_1(t) - 2y_2(t) + 3e^t. \end{cases} \tag{1}$$

$(\frac{1}{20})$ (a) Vérifier que $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$ sont les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

et que des vecteurs propres associés à ces valeurs propres sont respectivement

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$(\frac{2}{20})$ (b) Transformer le système (1) en un système de 2 équations différentielles non appariées (*découplées*) dans lequel chaque équation ne contient qu'une seule variable dépendante.

$(\frac{3}{20})$ (c) Résoudre les équations différentielles obtenues en (b) et en déduire **une solution particulière** du système d'équations différentielles (1).

Les professeurs des cours MTH1115/D