Département de mathématiques et de génie industriel
École Polytechnique de Montréal

MTH1115(D): ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
CONTRÔLE PÉRIODIQUE II

18 mars 2023

Directives: *Vous avez une heure et trente minutes pour compléter ce contrôle. Les calculatrices sont interdites.* ***Une réponse sans justification se verra attribuer la note 0.***

1. Questions indépendantes

($\frac{2}{20}$) (a) Soit $y(x) = \ln(x)$ une solution de l'équation différentielle

$$x^2y'' + xy' + y = \ln(x), \quad x > 0.$$

Trouver la solution générale à valeurs réelles de cette équation différentielle.

($\frac{3,5}{20}$) (b) Trouver un ensemble fondamental de solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$y^{(6)}(t) - 4y^{(2)}(t) = 0.$$

($\frac{2,5}{20}$) (c) Soit le problème de valeurs initiales

$$\begin{cases} x''(t) + 3y'(t) + 2x(t) = 0 \quad x(0) = 1 \quad x'(0) = 0 \\ \\ y''(t) + 3x'(t) + 2y(t) = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

i) Transformer ce système d'équations différentielles en un système équivalent d'équations différentielles d'ordre 1. **Écrire le système sous forme matricielle.**

ii) Donner les conditions initiales associées au système obtenu en (i).

($\frac{2}{20}$) (d) On considère le système d'équations différentielles non homogènes

$$\vec{y}'(t) = B\vec{y}(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ -2e^t \end{pmatrix},$$

où B est une matrice à coefficients constants de dimensions 3×3. De plus, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $B = PDP^{-1}$ où

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Transformer ce système en un système équivalent de 3 équations différentielles d'ordre 1 découplées (*non appariées*) dans lequel chaque équation ne contient qu'une seule variable dépendante. **On ne demande pas de résoudre le système obtenu.**

($\frac{5}{20}$) 2. Trouver la solution de l'équation différentielle

$$y'' + 2y' = 4t + 2e^{-t}$$

qui satisfait aux conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

3. Soit le système d'équations différentielles d'ordre 1

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) - 5y_2(t), \\ y_2'(t) = y_1(t) + 3y_2(t). \end{cases} \tag{1}$$

($\frac{1}{20}$) (a) Vérifier que $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2+i \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice des coefficients et qu'il est associé à la valeur propre $\lambda = 1 + i$.

($\frac{3}{20}$) (b) En vous servant de la méthode basée sur les valeurs et les vecteurs propres, trouver la solution à valeurs réelles du système (1) qui satisfait aux conditions initiales

$$y_1(0) = 1 \quad \text{et} \quad y_2(0) = 1.$$

($\frac{1}{20}$) (c) Transformer le système d'équations différentielles (1) en une seule équation différentielle d'ordre 2 de variable dépendante $y_2(t)$. **On ne demande pas de résoudre l'équation obtenue.**

Les professeurs des cours MTH1115(D)