

MTH1115(D): ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES  
CONTRÔLE PÉRIODIQUE I

11 février 2023

**Directives:** Vous avez une heure et trente minutes pour compléter ce contrôle. Les calculatrices sont interdites. **Une réponse sans justification se verra attribuer la note 0.**

1. Questions indépendantes

- ( $\frac{2,5}{20}$ ) (a) On considère l'équation différentielle

$$(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} + xy = 1 + x - y.$$

En réécrivant au besoin cette équation sous une autre forme, identifier parmi les méthodes étudiées en classe, 3 méthodes qu'on peut utiliser pour résoudre cette équation différentielle.

**On ne demande pas de résoudre l'équation différentielle. Justifier vos réponses.**

- ( $\frac{1,5}{20}$ ) (b) Soit l'équation différentielle sous la forme

$$(x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + yy' = 0.$$

Est-ce que  $F(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$  est un facteur intégrant de cette équation différentielle?

**Note: Une réponse sans la bonne justification se verra attribuer la note 0.**

- ( $\frac{1}{20}$ ) (c) On considère l'équation différentielle d'ordre 2

$$(y(t))^2 y''(t) + y(t)(y'(t))^2 = 1. \quad (1)$$

En utilisant un changement de variable approprié, transformer l'équation différentielle (1) en une équation différentielle équivalente d'ordre 1. **Justifier le changement de variable utilisé**

- (d) Soient  $y_1(x) = \sin(x)$  et  $y_2(x) = x \sin(x)$  deux solutions de l'équation différentielle

$$\sin^2(x) y'' - 2 \sin(x) \cos(x) y' + (\cos^2(x) + 1) y = 0 \quad \text{pour } 0 < x < \pi.$$

- ( $\frac{1}{20}$ ) i) Calculer le wronskien  $W(y_1, y_2)(x)$ .

- ( $\frac{1}{20}$ ) ii) Est-ce que les solutions  $y_1(x)$  et  $y_2(x)$  forment un ensemble fondamental de solutions de l'équation différentielle? **Justifier votre réponse.**

**Note: Une réponse sans la bonne justification se verra attribuer la note 0.**

- ( $\frac{6}{20}$ ) 2. Résoudre le problème de valeur initiale

$$yy' + y^2 = te^{-t}, \quad y(0) = 2.$$

**Donner la solution sous la forme explicite.**

- ( $\frac{7}{20}$ ) 3. Résoudre l'équation différentielle

$$2xy + 3y^2 - (2xy + x^2)y' = 0.$$

**Donner la ou les solutions sous la forme explicite.**