Département de mathématiques et de génie industriel
École Polytechnique de Montréal

MTH1115D: ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
CONTRÔLE PÉRIODIQUE I

30 septembre 2023

Directives: *Vous avez une heure et trente minutes pour compléter ce contrôle. Les calculatrices sont interdites.* ***Une réponse sans justification se verra attribuer la note 0.***

1. Questions indépendantes

   (a) Soit l'équation différentielle d'ordre 2

$$t^2 y'' - (y')^2 = 0, \quad t > 0. \tag{1}$$

($\frac{1}{20}$) i) En utilisant un changement de variable approprié, transformer l'équation différentielle (1) en une équation différentielle d'ordre 1.
Justifier le changement de variable utilisé.

($\frac{2}{20}$) ii) En réécrivant au besoin l'équation différentielle d'ordre 1 obtenue en (i) sous une autre forme, identifier parmi les méthodes étudiées en classe, 4 méthodes qu'on peut utiliser pour la résoudre. **On ne demande pas de la résoudre.**

($\frac{1,5}{20}$) (b) On considère le problème de valeurs initiales suivant

$$(1 - t^2)y'' + ty' - y = \tan t, \quad y(2) = 3 \text{ et } y'(2) = -2.$$

Sans tenter de trouver la solution, déterminer l'intervalle d'amplitude maximale dans lequel ce problème de valeurs initiales admet une solution unique, au moins 2 fois différentiable.

($\frac{1}{20}$) (c) On considère l'équation différentielle

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{2}$$

où les fonctions $p(t)$ et $q(t)$ sont continues dans un intervalle ouvert I contenant $t_0 = 1$. Soit $y_1(t)$ et $y_2(t)$ des solutions de l'équation différentielle (2) qui satisfont aux conditions:

$$y_1(1) = 3, \quad y_1'(1) = 0, \quad y_2(1) = 1 \quad \text{et} \quad y_2'(1) = \frac{1}{3}.$$

Est-ce que $y_1(t)$ et $y_2(t)$ forment un ensemble fondamental de solutions de l'équation différentielle (2)?
Une réponse sans la bonne justification se verra attribuer la note 0**.**

($\frac{6,5}{20}$) 2. Résoudre le problème de valeur initiale

$$yy' + y^2 = 2t, \quad y(0) = -2.$$

Donner la solution sous la forme explicite.

3. Soit l'équation différentielle

$$x^2 y' = y^2 - 4xy + 6x^2, \quad x > 0 \tag{3}$$

$(\frac{7}{20})$ (a) Résoudre l'équation différentielle (3).
Donner la ou les solutions sous la forme explicite.

$(\frac{1}{20})$ (b) Trouver la solution de l'équation différentielle (3) qui satisfait à la condition initiale $y(2) = 4$.

Les professeurs du cours MTH1115(D)