Département de mathématiques et de génie industriel
École Polytechnique de Montréal

TRANSFORMÉES DE LAPLACE
EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

1. Trouver la transformée de Laplace de chacune des fonctions suivantes:

(a)

$$f_1(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 3; \\ e^t, & t \ge 3. \end{cases}$$

(b)

$$f_2(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \frac{\pi}{2}; \\ \sin(t), & t \ge \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

(c)

$$f_3(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < \pi; \\ 1, & \pi \le t < 2\pi; \\ \sin(t), & t \ge 2\pi. \end{cases}$$

(d)

$$f_4(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2; \\ \cos(\pi t), & 2 \le t < 3; \\ 0, & t \ge 3. \end{cases}$$

Note:

$\sin(u+v) = \cos(u)\sin(v) + \sin(u)\cos(v)$ $\quad \cos(u+v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)$

2. Déterminer la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes:

(a)

$$F(s) = \frac{s^2 + 4s - 1}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

(b)

$$G(s) = \frac{3s - 2}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + s}$$

(c)

$$H(s) = \frac{-s^2 + 2s - 4}{s^3 - s^2 + 2s - 2}$$

(d)

$$K(s) = \frac{-13e^{-2s}}{s(s^2 - 6s + 13)} + \frac{s - 6}{s^2 - 6s + 13}$$

(e)

$$Q(s) = \frac{(3s^2+10s+3)e^{-3s}}{(s^2+2s+10)(s^2+2s+1)}$$

3. L'équation décrivant un circuit électrique contenant une résistance $R = 1\,\Omega$ et une capacitance $C = 0{,}5$ farad est

$$q'(t) + 2q(t) = 5e(t),$$

où $q(t)$ (en coulombs) est la charge dans le condensateur et

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le t < \frac{3\pi}{2} \\ \sin(t) & \text{si} \quad t \ge \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

(en volts) est la tension appliquée au circuit.

(a) Écrire la fonction $e(t)$ en termes de fonctions de Heaviside et calculer $E(s)$ sa transformée de Laplace.

(b) Sachant que la charge initiale $q(0) = 1$, utiliser les transformées de Laplace pour trouver $q(t)$ la charge dans le condensateur au temps t.

4. On considère le problème de valeurs initiales suivant:

$$\begin{cases} y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = g(t); \\ \\ y(0) = 1 \quad \text{et} \quad y'(0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où

$$g(t) = \begin{cases} 2e^t & \text{si} \quad 0 \le t < 2; \\ 0 & \text{si} \quad t \ge 2. \end{cases}$$

(a) Écrire la fonction $g(t)$ en termes de fonctions de Heaviside et calculer sa transformée de Laplace $G(s)$.

(b) Trouver la solution $y(t)$ du problème de valeurs initiales (1).

5. Réponses aux exercices

- Exercice 1

  (a) $F_1(s) = \frac{1}{s^2} - e^{-3s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s}\right) + \frac{e^{-3(s-1)}}{s-1}$

  (b) $F_2(s) = \frac{se^{-\frac{\pi s}{2}}}{s^2+1}$

  (c) $F_3(s) = \frac{2}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s} + e^{-2\pi s}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s}\right)$

  (d) $F_4(s) = \frac{se^{-2s}}{s^2+\pi^2} + \frac{se^{-3s}}{s^2+\pi^2}$

- Exercice 2

  (a) $f(t) = 2e^t - 11e^{2t} + 10e^{3t}$

  (b) $g(t) = -2 + 2e^{-t} + 2te^{-t} + \frac{5}{2}t^2e^{-t}$

  (c) $h(t) = -e^t + \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)$

(d) $k(t) = (-1 + f(t-2))\,u_2(t) + f(t)$ où $f(t) = e^{3t}\left(\cos(2t) - \frac{3}{2}\sin(2t)\right)$

(e) $q(t) = f(t-3)u_3(t)$ où $f(t) = \frac{4}{9}e^{-t} - \frac{4}{9}te^{-t} - \frac{4}{9}e^{-t}\cos(3t) + \frac{31}{27}e^{-t}\sin(3t)$

- Exercice 3

(a) $e(t) = \sin(t)u_{\frac{3\pi}{2}}(t)$ $E(s) = -\frac{se^{-\frac{3\pi s}{2}}}{s^2+1}$

(b) $q(t) = e^{-2t} - f(t - \frac{3\pi}{2})u_{\frac{3\pi}{2}}(t)$ où $f(t) = -2e^{-2t} + 2\cos(t) + \sin(t)$

- Exercice 4

(a) $g(t) = 2e^t(1 - u_2(t))$ $G(s) = \frac{2}{s-1} - 2e^2\frac{e^{-2s}}{s-1}$

(b) $y(t) = e^t + e^{2t} - e^{3t} - e^2\left(e^{t-2} - 2e^{2(t-2)} + e^{3(t-2)}\right)u_2(t)$

Donatien N'dri