Département de mathématiques et de génie industriel
École Polytechnique de Montréal

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES
EXERCICES É.D.O D'ORDRE 1

1. En réécrivant au besoin chaque équation différentielle sous une autre forme, déterminer parmi les méthodes étudiées en classe, la ou les méthodes qu'on peut utiliser pour résoudre chacune des équations différentielles suivantes.
N.B.: On ne demande pas de résoudre les équations différentielles. Justifier vos réponses.

   (a)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x}$$

   (b)
$$x\frac{dy}{dx} = ye^{\frac{y}{x}} - x$$

   (c)
$$2xyy' + y^2 = 2x^2$$

   (d)
$$\left(x^2 + \frac{2y}{x}\right)dx = (3 - \ln x^2)dy$$

   (e)
$$t\frac{dQ}{dt} + Q = t^4 \ln t$$

   (f)
$$x^2y' + 2xy^3 = 6xy$$

2. Trouver la solution des problèmes à valeur initiale suivants:

   (a)
$$(2yx + 2y)y' + (y^2 - 3x^2) = 0 \quad \text{et} \quad y(2) = -\sqrt{3}$$

   (b)
$$xdy + \left(y - x^3y^3\right)dx = 0 \quad \text{et} \quad y(-2) = \frac{1}{4}$$

   (c)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-xy)}{e^{x^2}} \quad \text{et} \quad y(0) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{2}}}$$

   (d)
$$y' = e^{2y-x} \quad \text{et} \quad y(0) = 0$$

   (e)
$$(x^2+4)\frac{dy}{dx} + 8xy = 2x \quad \text{et} \quad y(0) = -1$$

   (f)
$$e^xy' + 2xe^xy - (2x+1)y^2 = 0 \quad \text{et} \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

3. Trouver la solution générale des équations différentielles suivantes:

   (a)
   $$(1 + e^x y + xe^x y)dx + (xe^x + 2)dy = 0$$

   (b)
   $$yy' + x^2 e^{2x^3+y^2} = 0$$

   (c)
   $$xyy' + y^2 - 2x = 0$$

   (d)
   $$xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}$$

4. Réponses aux exercices

   - Exercice 1
     (a) Linéaire, homogène de la forme $y' = F(\frac{y}{x})$ et exacte.
     (b) Homogène de la forme $y' = F(\frac{y}{x})$.
     (c) Homogène de la forme $y' = F(\frac{y}{x})$, Bernoulli et exacte.
     (d) Exacte et linéaire.
     (e) Linéaire et exacte.
     (f) Variables séparables, exacte et Bernoulli.
   - Exercice 2
     (a) $y(x) = -\sqrt{\dfrac{1+x^3}{1+x}}$
     (b) $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-2x^3}}$
     (c) $y(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{2}e^{-x^2}}}$
     (d) $y(x) = -\dfrac{1}{2}\ln(2e^{-x} - 1)$
     (e) $y(x) = \dfrac{1}{4} - 320(x^2+4)^{-4}$
     (f) $y(x) = \dfrac{1}{e^{x^2} + e^{-x}}$
   - Exercice 3
     (a) $y(x) = \dfrac{C - x}{2 + xe^x}$
     (b) $y(x) = \pm\sqrt{\ln\left(3(e^{2x^3} - 6C)^{-1}\right)}$
     (c) $y(x) = \pm\sqrt{\dfrac{4x^3 + 3C}{3x^2}}$
     (d) $y(x) = -x(\ln(-\ln|x| + C))$

Donatien N'dri