

MAILLAGES de DELAUNAY

Ricardo Camarero
Département de génie mécanique
29 février 2024



Table des matières

- 1 Mailleur de Delaunay contraint
- 2 Triangulations contraintes
- 3 Triangulation par avance de front
- 4 Collision du front
- 5 Mailleur par raffinement



Motivation et contexte

Concepts de base et historique

Modélisation géométrique

Maillages structurés/curvilignes :

- Méthodes algébriques
- Méthodes EDP : Elliptiques
- Concentration de mailles

Maillages non-structurés :

- Triangulation de Delaunay
- **Maillages Delaunay contraints**
- Méthode d'avance de front

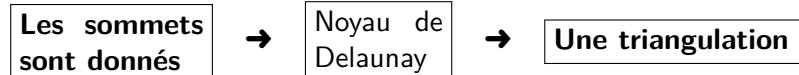
Maillages hybrides :

- décomposition spatiale : multiblocs, hiérarchique.

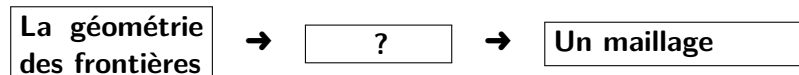
Mailleur de Delaunay contraint

Maillage vs triangulation

Dans le cas d'une triangulation,



Dans la pratique, on dispose de la géométrie, plutôt que des sommets,



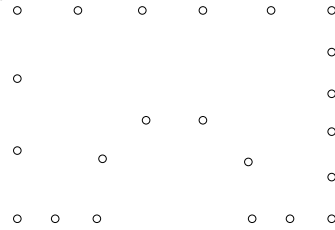
Le rôle d'un mailleur est de générer et d'insérer les sommets dans la triangulation :

- celle-ci doit nécessairement inclure les frontières du domaine.
- les éléments doivent adhérer à la frontière et se situer à l'intérieur du domaine.

Une première approche

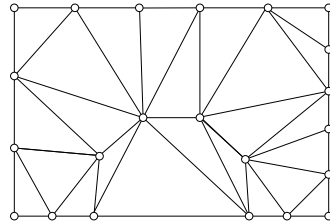
À partir de la discrétisation des frontières,

- on construit la triangulation de Delaunay utilisant seulement les sommets frontières.
- Ceci vise à assurer que les frontières font partie du maillage final.



Cette approche échoue car le noyau de Delaunay,

- donne la triangulation de l'enveloppe convexe du nuage de points ;
- contient tous les sommets, mais peut ne pas comprendre toutes les arêtes ;
- peut engendrer des éléments à l'extérieur du domaine.



Remarques

Le noyau de Delaunay :

- 1 ne dispose pas, et ne peut pas utiliser d'informations sur les frontières, ni appliquer le concept d'intérieur/extérieur.
- 2 donne une triangulation de l'enveloppe convexe des sommets frontières :
 - qui contient tous les sommets,
 - mais qui peut ne pas comprendre toutes les arêtes.

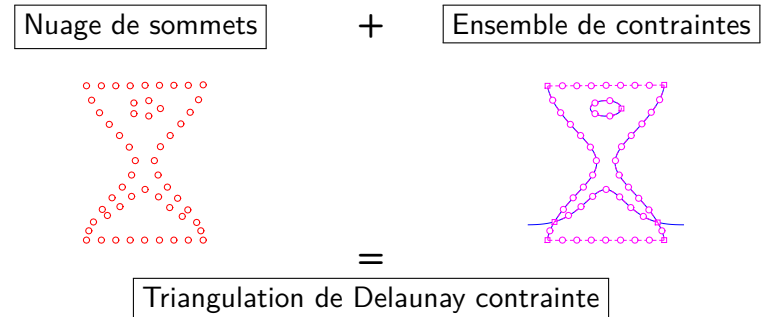
Si le domaine n'est pas convexe, comprend des trous. ..., alors, il se peut que la triangulation ne soit pas topologiquement conforme au domaine, et il n'est pas garanti,

- que les frontières du domaine font partie du maillage.
- que toutes les mailles se situent à l'intérieur du domaine.

- 1 Mailleur de Delaunay contraint
- 2 Triangulations contraintes
- 3 Triangulation par avance de front
- 4 Collision du front
- 5 Mailleur par raffinement

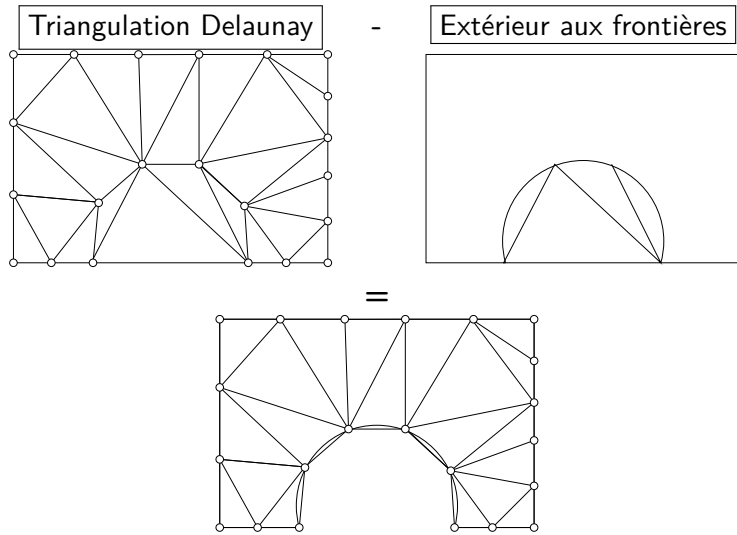
Contraintes

Ensemble d'arêtes en 2D (et d'arêtes et de faces en 3D) formant une boucle fermée représentant la frontière d'un domaine, appliqué sur un nuage de sommets \mathcal{S}

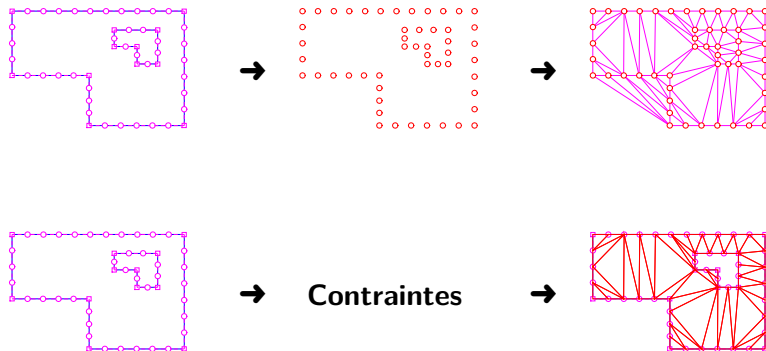
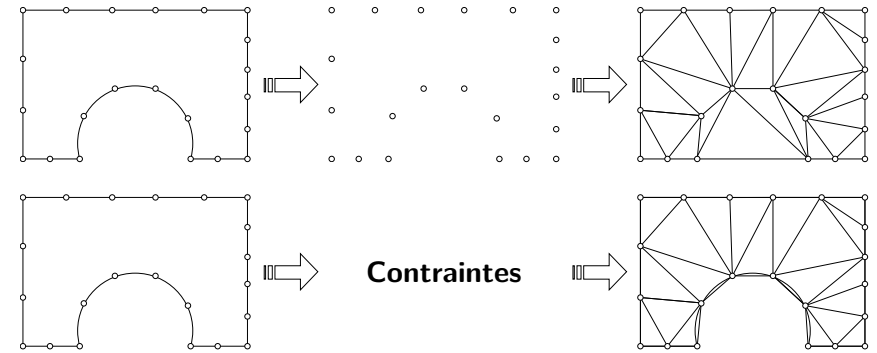


Une arête est un segment de droite orienté, d'un sommet vers le suivant, servant de base sur laquelle on construit un élément (triangle) d'un coté vers l'intérieur du domaine.

Ensemble d'arêtes en 2D (et d'arêtes et de faces en 3D) qui se situe à l'extérieur au domaine.



Application de contraintes



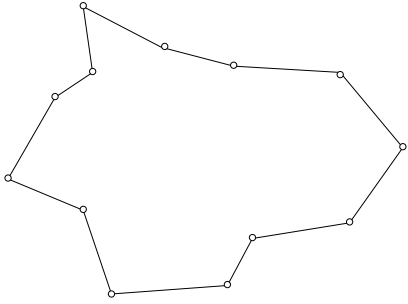
- Le forçage des contraintes peut s'avérer difficile.
- Une deuxième approche : Triangulation par avance de front

- 1 Maillage de Delaunay contraint
- 2 Triangulations contraintes
- 3 Triangulation par avance de front
- 4 Collision du front
- 5 Maillage par raffinement

Recouvrement par avance de front

Le point de départ est une discrétisation de la frontière qui donne une liste de sommets, suivi par une représentation polygonale qui applique la contrainte des frontières,

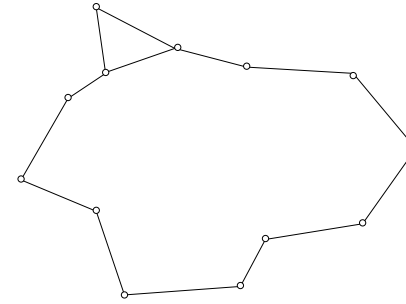
- par une liste d'arêtes en 2D, ou une liste de faces triangulaires en 3D ;
- ce qui assure que la topologie du domaine sera prise en compte, et pas uniquement les sommets.



- Par convention, les arêtes et les faces sont orientées de façon que le domaine à trianguler se trouve à gauche.
- Ces arêtes (sommets) constituent le front initial et sont la base pour la construction des éléments (triangles ou tétraèdres).

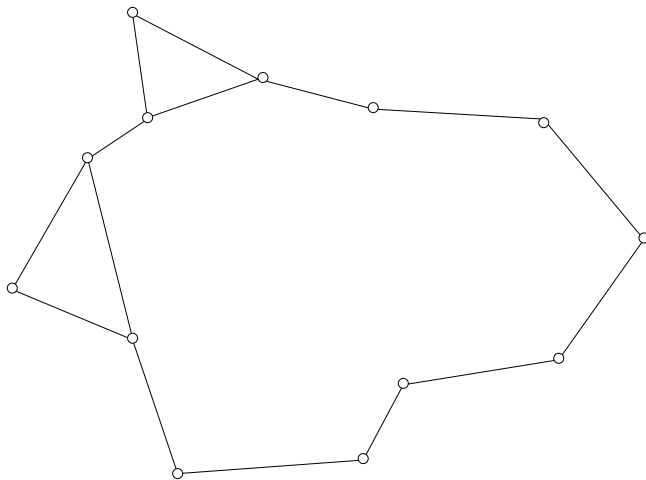
Progression du front : principe de base

On fait progresser le front vers l'intérieur du domaine en ajoutant des triangles intérieurs jusqu'à ce que le front soit vide, c-à-d que toutes arêtes aient été utilisées pour la construction des éléments.

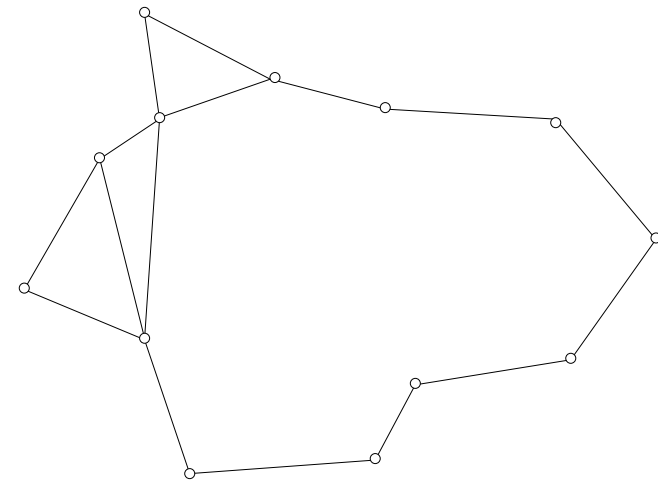


- 1 On construit un triangle sur le sommet soutenant le plus petit angle ;
- 2 On ajoute ce triangle à la triangulation (maillage) ;
- 3 Les deux arêtes soutenant le sommet sont retirées, et, le front est modifié dynamique en y ajoutant le côté du nouveau triangle opposé au sommet :

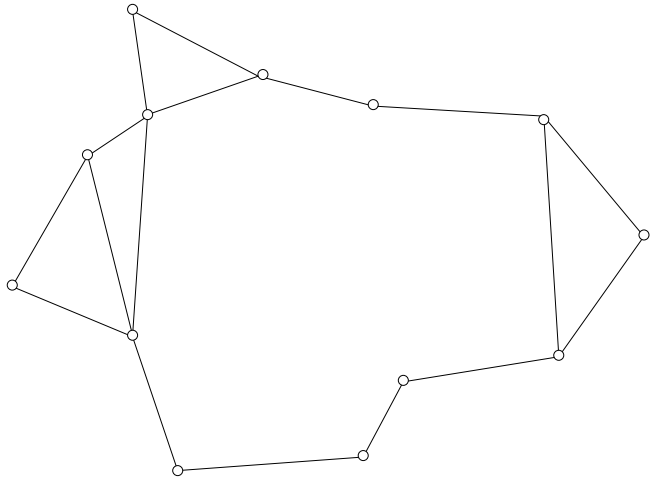
Recouvrement initial du domaine



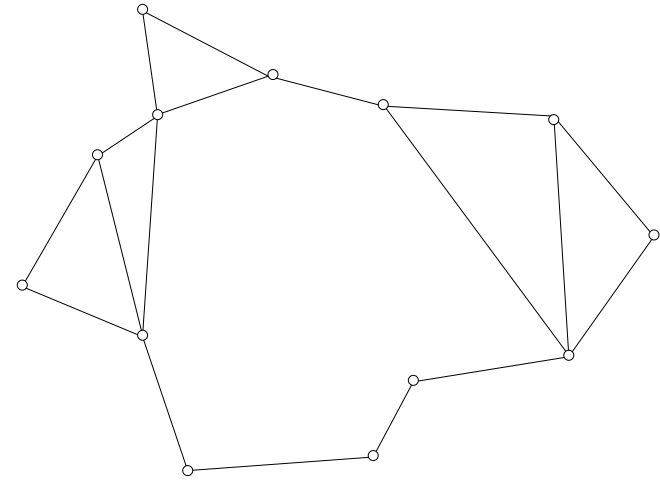
Recouvrement initial du domaine



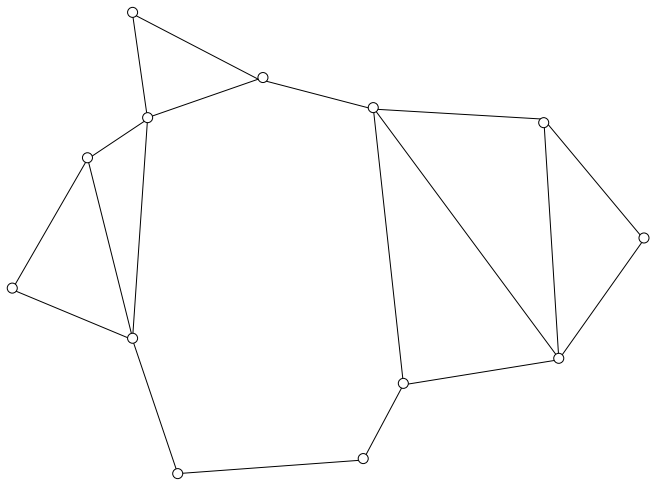
Recouvrement initial du domaine



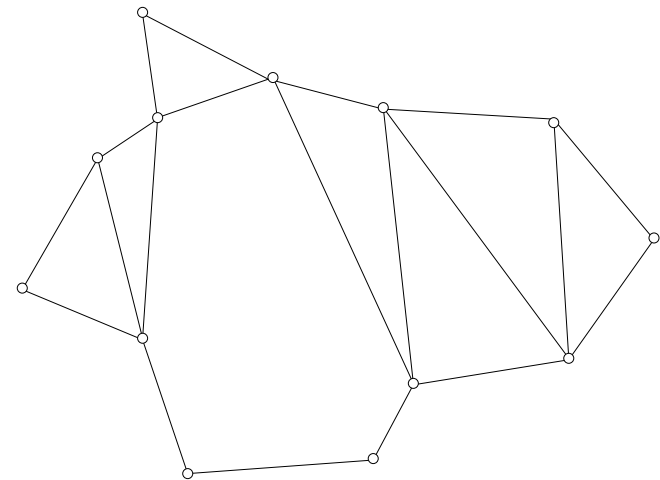
Recouvrement initial du domaine

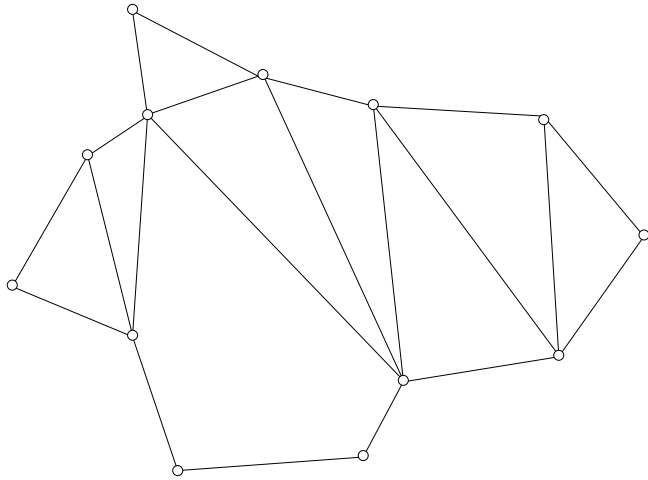
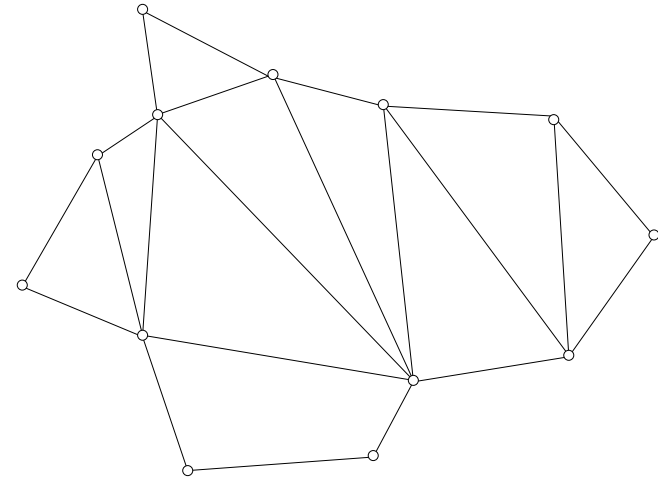
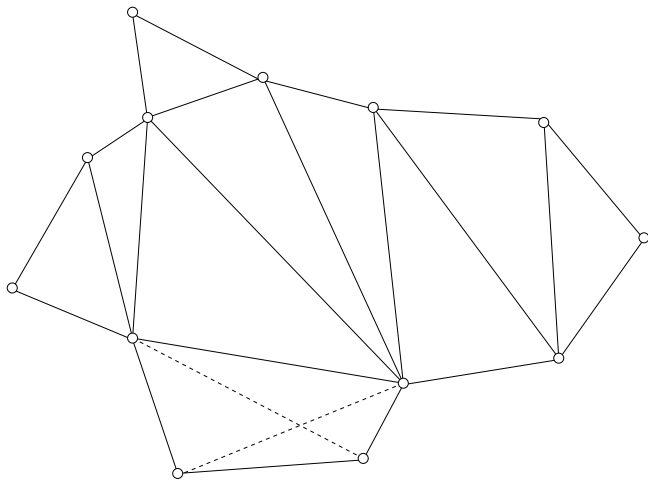


Recouvrement initial du domaine

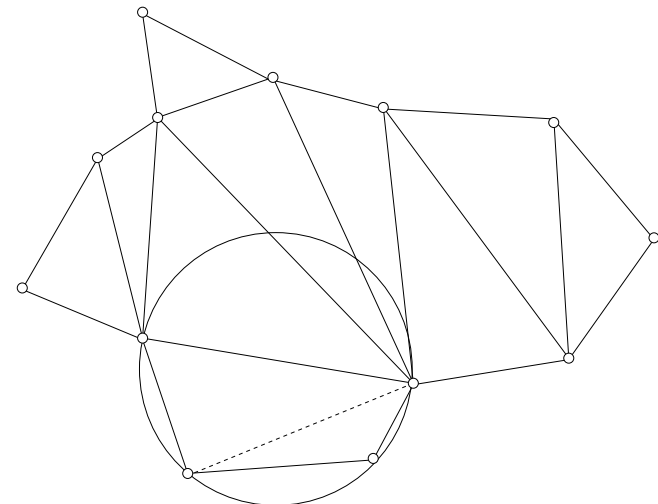


Recouvrement initial du domaine



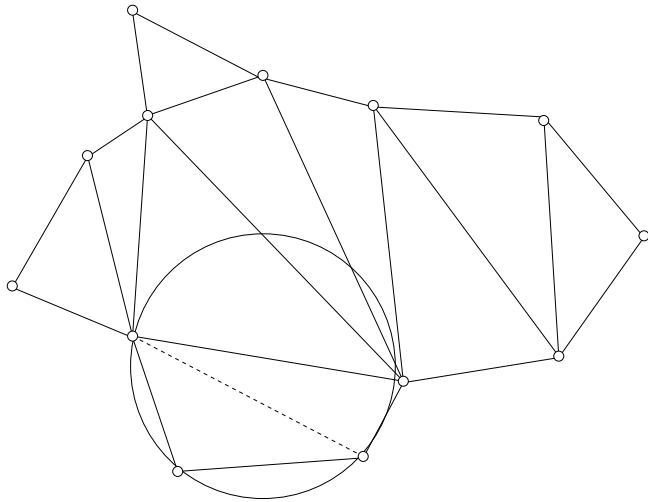
Triangulation du front**Recouvrement initial du domaine : finissant****Fermeture du front : deux possibilités**

→ Quelle configuration choisir ?

Fermeture du front : première possibilité

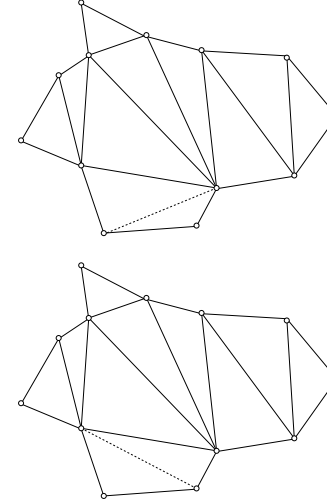
✗ Cercle circonscrit n'est pas vide !

Fermeture du front : deuxième possibilité



→ Ce qui donne une triangulation de Delaunay.

Le résultat est une triangulation qui utilise seulement les sommet et arêtes de la frontière comme contrainte, et, qui par la méthode de construction même :



Adhérence : inclut correctement la géométrie du domaine ;

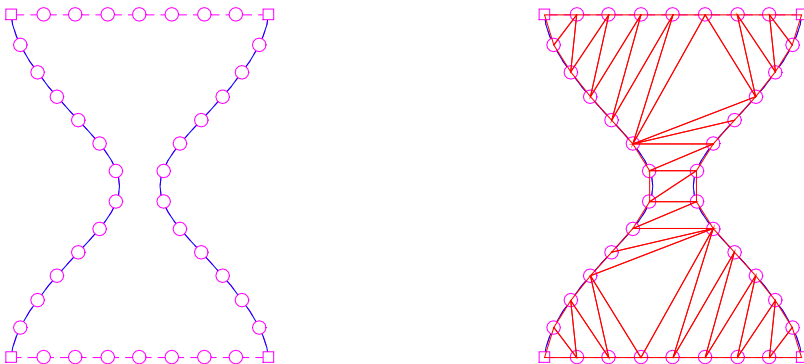
Recouvrement : vérifie la topologie du domaine : intérieur et extérieur, configurations concaves et avec des trous.

Delaunay : vérifie, ou peut être transformée afin de vérifier le critère de Delaunay

Raffinement : ne contient aucun sommet/triangle à l'intérieur du domaine qui doit être discrétisé.

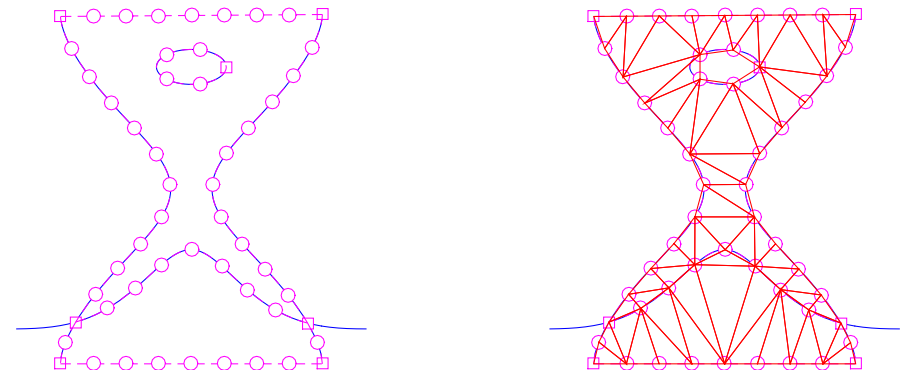
Domaines complexes : Traitement des collisions

Telle que présentée cette approche suppose que le domaine est simplement connexe, c-à-d sans trous ou frontières internes :



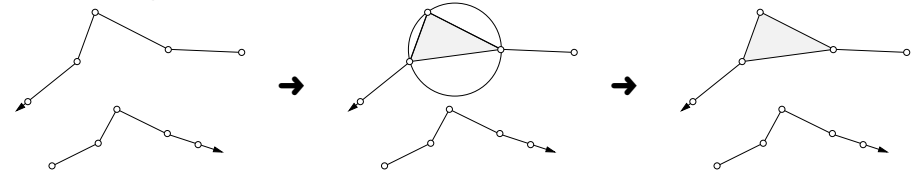
Domaines complexes : Traitement des collisions

Appliqué à un domaine avec frontières internes, avec des trous (non simplement connexe) cette approche nécessite le traitement des collisions du front avec lui-même ou d'autres fronts issus de trous :

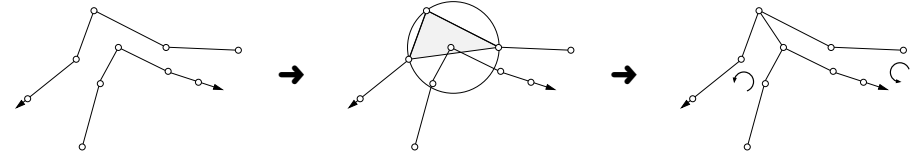


- 1 Maillage de Delaunay contraint
- 2 Triangulations contraintes
- 3 Triangulation par avance de front
- 4 Collision du front
- 5 Maillage par raffinement

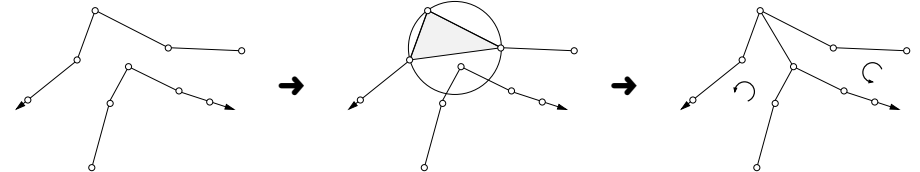
✓ Le triangle candidat est vide.



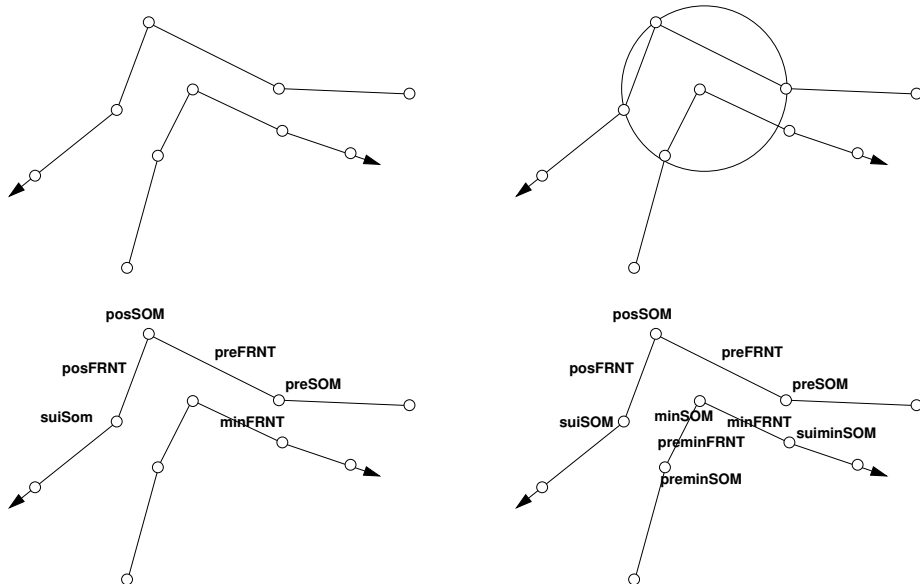
✗ Le triangle candidat n'est pas vide et donne lieu à un maillage non valide.



✗ Le triangle candidat est vide et mais le cercle circonscrit ne l'est pas.

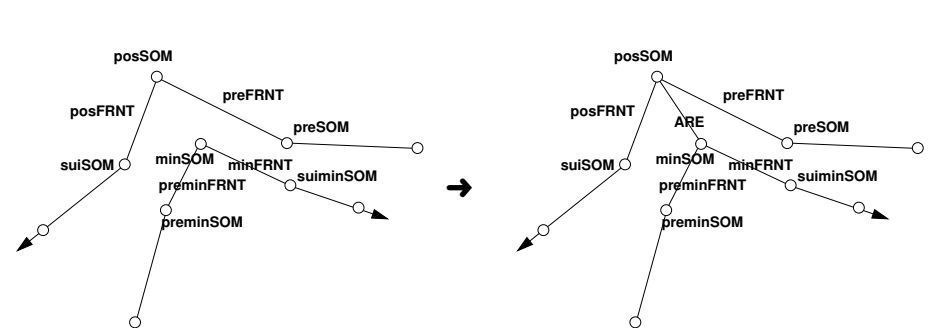


Topologie de la collision

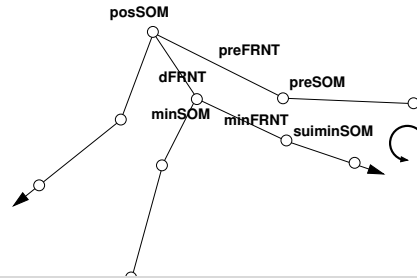
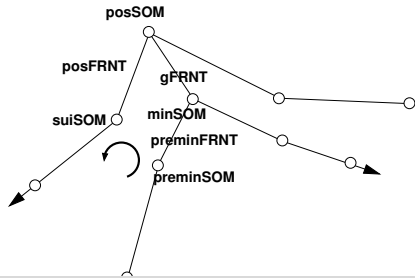
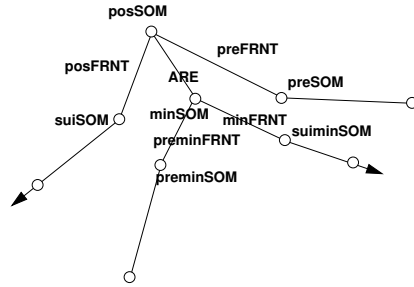


Topologie de la collision

Le front est scindé en deux parties par l'insertion d'une arête;



Mise à jour de la topologie du front



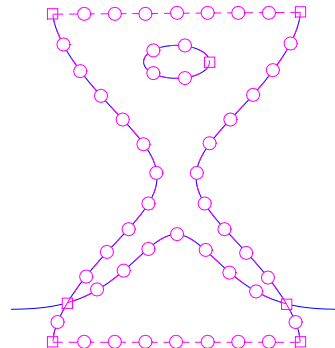
- 1 Mailleur de Delaunay contraint
- 2 Triangulations contraintes
- 3 Triangulation par avance de front
- 4 Collision du front
- 5 Mailleur par raffinement

Delaunay contraint avec raffinement

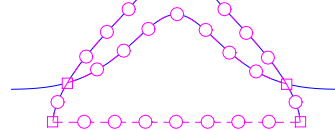
En combinant le noyau de Delaunay avec l'avance de front on peut obtenir le maillage d'un domaine, en conformité avec sa géométrie et topologie.

Cette méthode enchaîne deux étapes :

Recouvrement contraint



Raffinement



Delaunay contraint avec raffinement

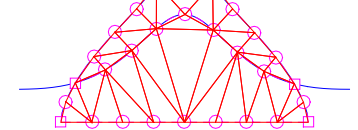
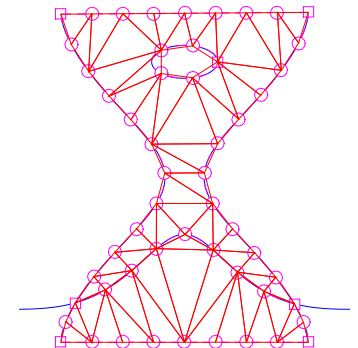
En combinant le noyau de Delaunay avec l'avance de front on peut obtenir le maillage d'un domaine, en conformité avec sa géométrie et topologie.

Cette méthode enchaîne deux étapes :

Recouvrement contraint

partant des seuls points de la discrétisation de la frontière, basé sur une méthode d'avance de front ;

Raffinement



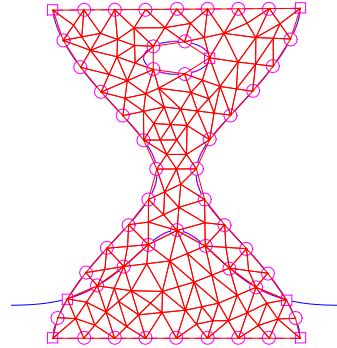
Delaunay contraint avec raffinement

En combinant le noyau de Delaunay avec l'avance de front on peut obtenir le maillage d'un domaine, en conformité avec sa géométrie et topologie.

Cette méthode enchaîne deux étapes :

Recouvrement contraint

partant des seuls points de la discrétisation de la frontière, basé sur une méthode d'avance de front ;

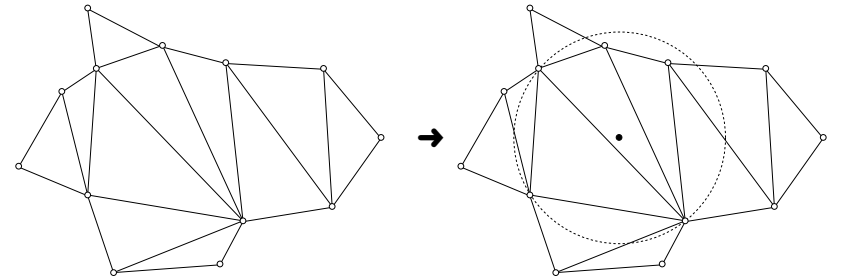


Raffinement de ces triangles initiaux par l'insertion de sommets intérieurs utilisant le noyau de Delaunay.

Insertion de points intérieurs

On raffine le recouvrement initial par l'insertion d'un sommet pour chaque simplexe dont l'aire (ou le volume en 3D) est plus grand qu'un seuil de raffinement.

Il peut être généré au centre du cercle circonscrit :

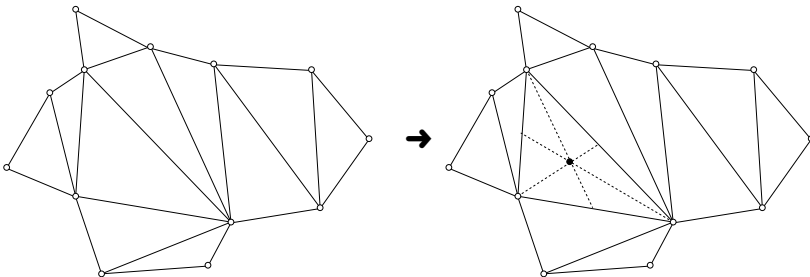


✗ Ce point peut être hors du domaine.

Insertion de points intérieurs

On raffine le recouvrement initial par l'insertion d'un sommet pour chaque simplexe dont l'aire (ou le volume en 3D) est plus grand qu'un seuil de raffinement.

Il peut être généré au centroïde du triangle :

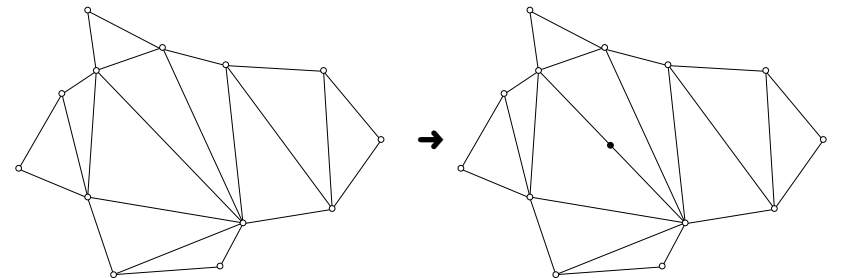


✓ C'est une approche plus robuste.

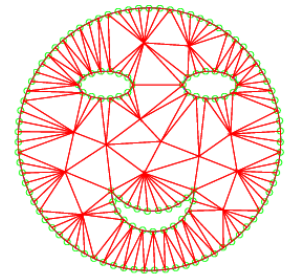
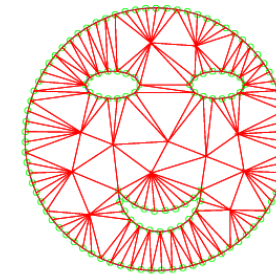
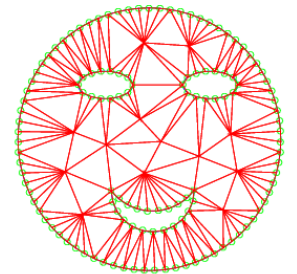
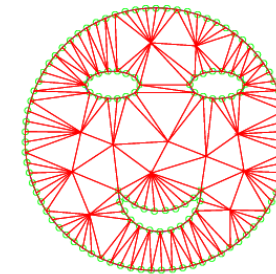
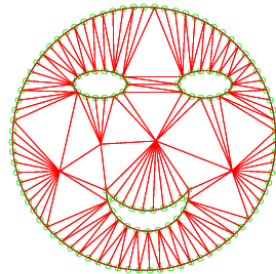
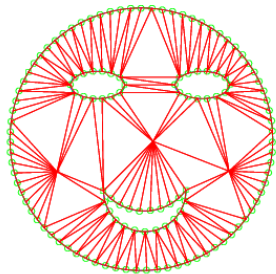
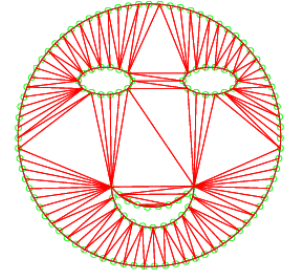
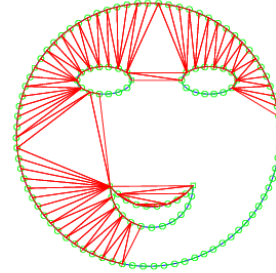
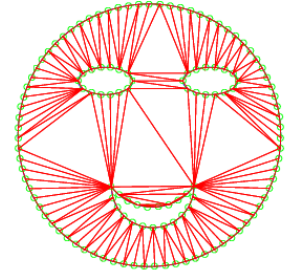
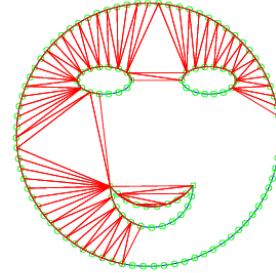
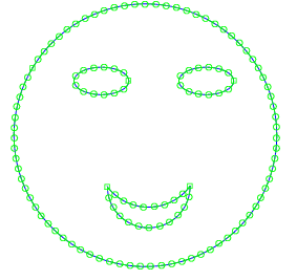
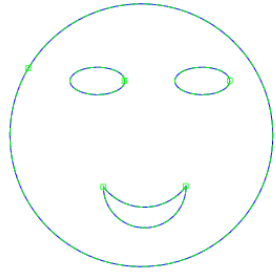
Insertion de points intérieurs

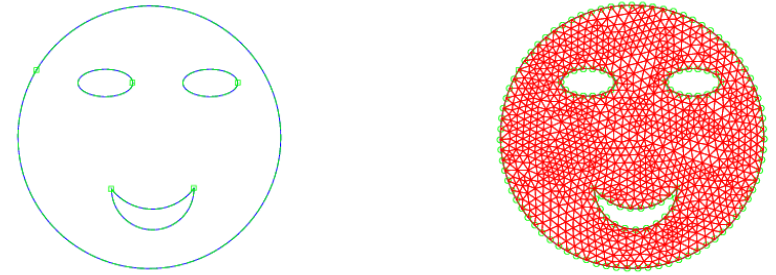
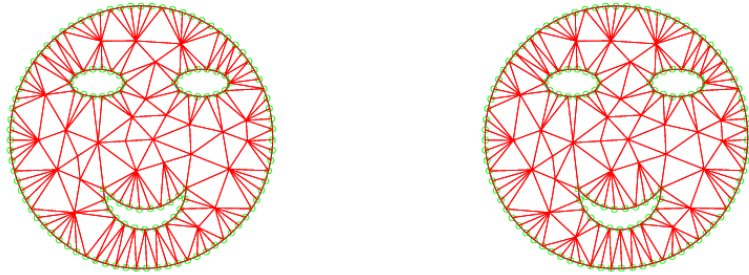
On raffine le recouvrement initial par la division de l'arête dont la longueur dépasse un seuil établi par l'usager.

On insère un sommet au centre de cette arête :



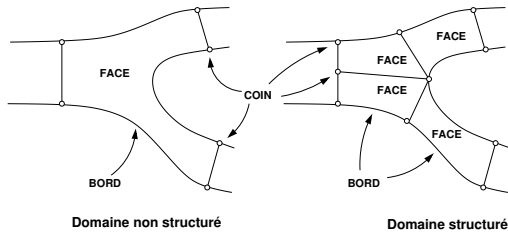
✓ C'est la méthode préférée.





Structure globale d'un maillage

- 1 Un domaine de calcul est constitué de zones, ou faces, bornées par des bords qui reposent sur les courbes de la géométrie :
 $DOMAINE \Rightarrow FACES \Rightarrow BOUCLES \Rightarrow BORDS \Rightarrow COINS$
- 2 Il y a deux types de *FACE* : non structuré ou structuré. Une face est constituée d'une boucle (*BCL*) externe, et, s'il y a lieu, des trous (boucles internes ou fentes).



- 3 La boucle externe se construit, dans le sens trigonométrique, par une suite de *BORD* formant un ensemble fermé.

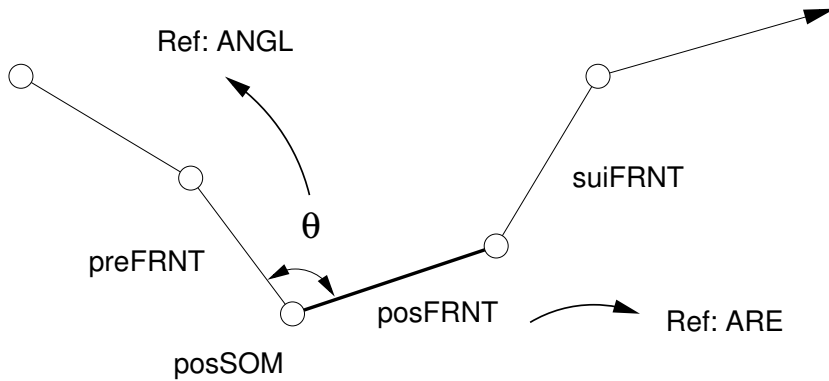
La structure FRNT

- Le front est une liste ordonnée contenant *FRNTdim* segments appelées positions, obtenues à partir de la discrétisation de la géométrie.
- La représentation informatique : $FRNT(1 : FRNTdim, 1 : 6)$

$FRNT(posFRNT,1)$	Sommet de la position	posSOM
$FRNT(posFRNT,2)$	Position précédente	preFRNT
$FRNT(posFRNT,3)$	Position suivante	suiFRNT
$FRNT(posFRNT,4)$	Sens de iARE	0 : contre 1 : dans le sens de FRNT 2 : de-activé
$FRNT(posFRNT,5)$	Arête correspondante	iARE
$FRNT(posFRNT,6)$	Référence à la liste des positions actives de FRNT	

où *posFRNT* indique une position sur le front.

Géométrie du FRONT



- Le front est construit¹ sur la discrétisation des frontières du domaine ;
- Les propriétés géométriques de la partie active du front, la longueur des arêtes et des angles soutendus aux sommets sont stockés dans les tableaux,

FRNTlong(iPOS)	Longueur de l'arête iARE à la position du FRNT
FRNTangl(iPOS)	Angle soutendu au sommet de la position du FRNT
FRNTindex(iPOS)	Référence à la position sur FRNT.

où $iPOS=1$:FRNTactif, le nombre de positions actives de FRNT.

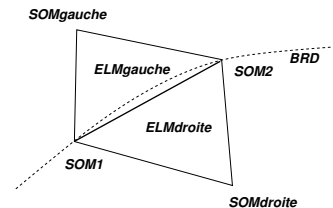
- On maintient ces listes dynamiquement au fur et à mesure de la progression du FRNT.

1. Voir la fonction *FRNTconstr(iFACE)*

Les arêtes

- Une arête est une entité topologique orientée, reliant deux sommets.
- La représentation informatique, $ARE(1 :nbARE,1 :7)$:

ARE(iARE,1)	Premier sommet
ARE(iARE,2)	Deuxième sommet
ARE(iARE,3)	ELM à gauche
ARE(iARE,4)	ELM à droite
ARE(iARE,5)	NOD à gauche
ARE(iARE,6)	NOD à droite
ARE(iARE,7)	BRD



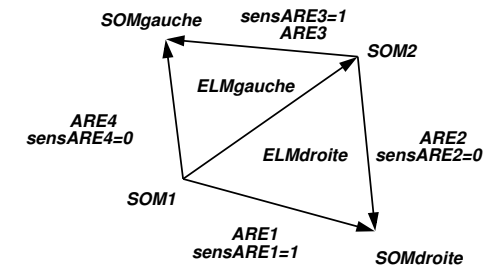
- L'entité ARE contient des informations sur :

le voisinage : ELM gauche/droite et NOD gauche/droite ;

le domaine : $ARE(iARE,7) = BRD$ représente l'identifiant du BRD sur lequel repose l'arête (zéro pour une arête intérieure).

Une nouvelle structure de données

On complète la structure ARE avec l'information du voisinage qui comprend les arêtes formant une boucle, **AREbcl**, autour de l'arête :



Arête	Référence	Sens (=0 horaire, =1 antihoraire)
A1	AREbcl(iARE,1)	AREbcl(iARE,2)
A2	AREbcl(iARE,3)	AREbcl(iARE,4)
A3	AREbcl(iARE,5)	AREbcl(iARE,6)
A4	AREbcl(iARE,7)	AREbcl(iARE,8)

Les éléments

Le tableau E est une représentation $E \rightarrow S$, c-à-d un élément est représenté par ses trois sommets, ordonnés dans le sens trigonométrique.

ELM(iELM,1)	S1	Premier sommet
ELM(iELM,2)	S2	Deuxième sommet
ELM(iELM,3)	S3	Troisième sommet

Recouvrement du domaine

La construction du recouvrement se fait à partir du sommet avec le plus petit angle, dans la liste :

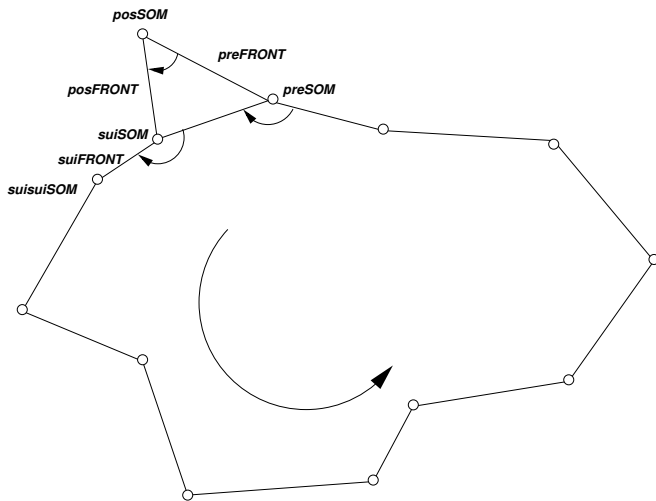
$$FRNTangl(1 : FRNTdim)$$

donné par,

$$[, posFRNT] = \min(FRNTangl(1 : FRNTactif))$$

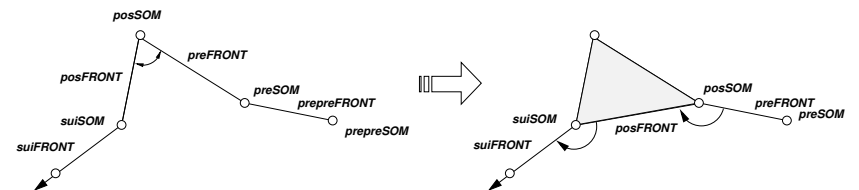
où $FRNTactif$ est le nombre d'arêtes actives du front.

Au début, $FRNTactif = FRNTdim$ et diminue au fur et à mesure que le front évolue, alors, $FRNTactif < FRNTdim$.



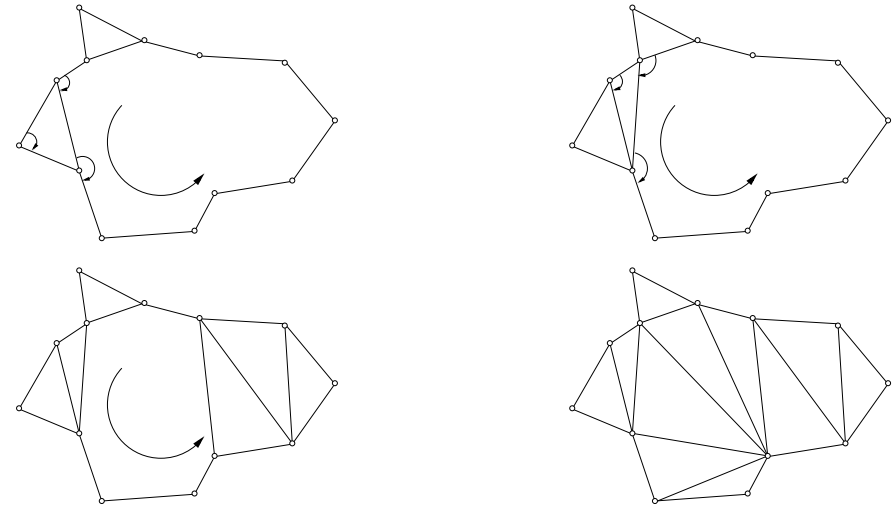
Mise à jour du FRONT

Suite à la construction d'un triangle, on doit faire la mise à jour du front, c-à-d du tableau $FRNT$, qui consiste à enlever deux positions et à en insérer une nouvelle,



Sur le plan informatique, et en pratique, on recycle une position et la seconde sera implicitement retirée car cette position ne sera référencée suite aux modifications.

- 1 On modifie (recyclique) la position **posFRNT** qui prend la place de la "nouvelle" position ;
 - le sommet devient **preSOM**
 - la position précédente de **posFRNT** devient **prepreFRNT** ;
 - les angles aux sommets **preSOM** et **suiSOM** sont recalculés ;
- 2 la position suivante de **prepreFRNT** est modifiée par **posFRNT** ;
- 3 Mise à jour de la géométrie du front actif, c-à-d la liste des angles, **FRNTangl**, des longueurs, **FRNTlong** et des références vers le **FRNT**, **FRNTindex** :
 - on enlève les angles **posFRNT**, **preFRNT** et **suiFRNT** ;
 - on calcule les angles aux nouvelles positions avec la fonction **angleSOM**, et on les insère dans la liste.



Intégration globale

Les différentes étapes de la production d'un maillage Delaunay contraint sont :

Étape	Fonction	Description
Front initial	<code>FRNTconstr(iFACE)</code>	Pour chaque face du domaine, on construit un front constitué des arêtes de la discrétisation des frontières du domaine
Triangulation initiale	<code>delFRNT3</code>	Construit des triangles sur les sommets du front en choisissant le sommet soutenant le plus petit angle, ce qui donne une triangulation initiale de type Delaunay contraint.
Cible du raffinement	<code>cible=max(FRNTlong)</code>	La fonction <code>FRNTconstr</code> calcule la longueur de chacune des arêtes du front. Cette variable servira de critère de raffinement des triangles du maillage
Raffinement du maillage	Noyau de Delaunay	Récurivement, on raffine les éléments dont la taille dépasse la cible, et on applique le noyau de Delaunay.