DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR É.D.O
LABORATOIRE V

Directives: *Cette séance de laboratoire vous permettra de vous familiarisez avec les notions de convergence et de stabilité de méthodes numériques pour la résolution des équations différentielles. Vous devrez utiliser des fonctions* MATLAB *disponibles sur le site Internet du cours qui vous éviteront d'avoir à programmer les algorithmes étudiés au cours.*

Ordre de convergence

1. Soit le problème de valeur initiale :

$$\begin{cases} y'(t) & = & 1 + \dfrac{y(t)}{t}; \\ y(1) & = & 1. \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Démontrer (et non vérifier) que la solution analytique de l'équation (1) est donnée par

$$y(t) = t(\ln(t) + 1).$$

   (b) Résoudre numériquement l'équation (1) à l'aide de la méthode du point milieu dans l'intervalle $[1\,,\,6]$ avec un pas de temps $h = 0,1$. Tracer sur un même graphe la solution numérique et la solution analytique. Quelle est l'erreur relative maximale (en %) rencontrée sur l'intervalle ?

   (c) Pour un pas de temps h donné, on pose $e(h) = y_N(6) - y(6)$ où $y_N(6)$ est l'approximation numérique de la valeur $y(6)$ donnée par la méthode du point milieu. Compléter (à la main) le tableau suivantet en déduire expérimentalement l'ordre de convergence de la méthode du point milieu.

h	$e(h)$	$\frac{e(h)}{e(\frac{h}{2})}$
1/4		——
1/8		
1/16		
1/32		
1/64		

L'ordre de convergence est:

Table 1: Comparaison des erreurs

Analyse de stabilité

2. Soit le problème de valeur initiale :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & -7y(t); \\ y(0) & = & 5. \end{array} \right. \tag{2}$$

Nous allons étudier le comportement de la méthode d'Euler en fonction du pas de temps h lorsque cette méthode est utilisée pour trouver une approximation de $y(t)$ dans l'intervalle $[0, 2]$.

(a) Trouver la solution analytique de l'équation (2).

(b) Pour chacun des pas: $h = 0,5$, $h = 0,25$ et $h = 0,125$,

- résoudre numériquement l'équation (2) à l'aide de la méthode d'Euler ;
- tracer sur un même graphique la solution numérique et la solution analytique;
- calculer l' erreur absolue commise et tracer ces 3 erreurs sur un même graphique.

Discuter, de façon pertinente, de vos résultats en fonction du pas h.

(c) La méthode d'Euler propose des solutions qui décroissent strictement vers 0 lorsque le pas de temps h est petit. Déterminer de façon expérimentale pour quelles valeurs de h la solution numérique tend vers la solution analytique.

(d) Déterminer analytiquement les valeurs de h pour lesquelles la méthode d'Euler appliquée au problème (2) est absolument stable.
Référence: Notes de cours complémentaires.

Guy Jomphe